Definición 1. *Un campo es un conjunto F que junto con dos operaciones binarias denotadas + llamada suma, y $*$ llamada multiplicación y donde los elementos del conjunto F satisfacen los siguientes axiomas*

Axiomas de la suma

(A_0) $\forall\ x, y \in F\ \exists\,!\ x + y \in F$ *llamado suma de x, y*
(A_1)$\forall\ x, y \in F$ *x+y=y+x* *Ley conmutativa para la suma*
(A_2) $\forall\ x, y, z \in F$ *x+(y+z)=(x+y)+z* *Ley asociativa para la suma*
(A_3) $\exists\ 0 \in F$ *tal que* $x + 0 = x\ \ \forall\ x \in F$ *Existencia de una identidad para la suma*
(A_4) $\forall\ x \in F\ \exists u \in F$ *tal que* $x + u = 0$ *Existencia de inversos para la suma*

Axiomas de la multiplicación

(M_0) $\forall\ x, y \in F\ \exists\,!\ x * y \in F$ llamado producto de x, y
(M_1)$\forall\ x, y \in F$ x*y=y*x Ley conmutativa para la suma
(M_2) $\forall\ x, y, z \in F$ x*(y*z)=(x*y)*z Ley asociativa para la multiplicación
(M_3) $\exists\ 1 \in F$ tal que $x * 1 = x\ \ \forall\ x \in F$ Existencia de una identidad para la multiplicación
(M_4) $\forall\ x \in F\ \exists u \in F$ tal que $x * u = 1$ Existencia de inversos para la multiplicación

Axiomas de distribución

(D) $\forall\ x, y, z \in F$ x*(y+z)=(x*y)+(x*z) Ley distributiva

Ejemplo Dado el conjunto $F = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Definimos la suma y la multiplicación

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

.	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

En este caso se satisfacen todos los axiomas y por tanto F es un campo

Ejemplo Dado el conjunto

$$F = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y\ \in \mathbb{R}\}$$

y dos operaciones definidas como

$$Suma: \quad (x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

$$Producto: \quad (x, y) \cdot (u, v) = x \cdot u + y \cdot v$$

En este caso no se satisface M_0 pues

$$(x, y) \cdot (u, v) = x \cdot u + y \cdot v \notin F$$

por lo tanto F no es un campo

Consecuencias de los axiomas de campo

Teorema 1. *Ley de la cancelación En algún campo F, se satisface:*
(a) si $x + y = x + z$ entonces $y = x$
(b) si $xy = xz$ y $x \neq 0$, entonces $y = z$

Demostración. **(a)** Suponga que $y+x = z+x$. Entonces usando (A_3) y (A_4), $\exists\, u \in F$ tal que $x+u = 0$, y

$$y \overset{A_3}{=} y + 0 \overset{A_4}{=} y + (x+u) \overset{A_2}{=} (y+x) + u \overset{hip.}{=} (z+x) + u \overset{A_2}{=} z + (x+u) \overset{A_4}{=} z + 0 \overset{A_3}{=} z$$

$\therefore\ y = z$

(b) Tenemos que

$$x \neq 0 \ \Rightarrow\ \exists\, u \ \in\ F \ \ni\ xu = ux = 1$$

entonces

$$y \overset{M_3}{=} y \cdot 1 \overset{M_4}{=} y(x \cdot u) \overset{M_2}{=} (yx)u \overset{hip.}{=} (zx)u \overset{M_2}{=} z(xu) \overset{M_4}{=} z \cdot 1 \overset{M_3}{=} z$$

$\therefore\ y = z$

$\square$

Teorema 2. *Unicidad de los elementos identicos e inversos En algún campo F, se satisface:*

a) En (A_3) El elemento neutro aditivo es único

b) En (M_3) El elemento neutro multiplicativo es único

c) En (A_4) El elemento inverso aditivo u es único

d) En (M_4) El elemento inverso multiplicativo u es único

Demostración. **(a)** Suponga que 0 y $0'$ son elementos que satisfacen (A_3). Entonces

$$\forall\, x \in F,\quad x + 0 = x,\quad y\ \ \forall\, x \in F,\ x + 0' = x,\ \textit{entonces}\ 0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

$\therefore\ 0 = 0'$

(b) Suponga que 1 y $1'$ son elementos que satisfacen (A_3). Entonces

$$\forall\, x \in F,\quad x \cdot 1 = x,\quad y\ \ \forall\, x \in F,\ x \cdot 1' = x,\ \textit{entonces}\ 1 = 1 \cdot 1' = 1' \cdot 1 = 1'$$

$\therefore\ 1 = 1'$

(c) Sea $x \in F$. Suponga que u y v son elementos de F que satisfacen la propiedad (A_4) entonces

$$x + u = 0 \ \ y\ \ x + v = 0 \ \Rightarrow\ x + u = x + v \ \Rightarrow\ u = v$$

(d) Sea $x \in F$. Suponga que u y u' son elementos de F que satisfacen la propiedad (M_4) entonces

$$x \cdot u = 1 \ \ y\ \ x \cdot u' = 1 \ \Rightarrow\ u = u \cdot 1 = u(x \cdot u') = (ux) \cdot u' = 1 \cdot u' = u'$$

$\square$

En los teoremas anteriores vimos que los elementos neutros e inversos son únicos, usualmente para la suma denotamos al inverso aditivo de un elemento $x \in F$ como $u = -x \in F$ tal que $x + (-x) = 0$.
En el caso de la multiplicación se tiene $x \neq 0 \ \Rightarrow \ u = \dfrac{1}{x} = x^{-1} \in F$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$

Propiedades de los Neutros e Inversos

Teorema 3. *Para algún campo F se cumplen las siguientes propiedades*
(a) $0 = -0$
(b) $\forall\ x \in F, \quad -(-x) = x$
(c) $1^{-1} = 1$ *y* $(-1)^{-1} = -1$
(d) $\forall\ x \in\ F, \quad x \cdot 0 = 0$
(e) $xy = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$ *o* $y = 0$
(f) Si $x \neq 0$, *entonces* $x^{-1} \neq 0$ *y* $(x^{-1})^{-1} = x$
(g) Si $x, y \neq 0$, *entonces* $x \cdot y \neq 0$ *y* $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1}y^{1}$
(h) $\forall\ x \in F$, $(-1)x = -x$
(i) $\forall x, y \in F$, $(-x)y = -(xy) = x(-y)$
(j) $(-1)(-1) = 1$
(k) $\forall x, y \in F$, $(-x)(-y) = xy$

Demostración. **(a)** Tenemos que $0 + 0 = 0$ y $0 + (-0) = 0$ asi que $0, -0$ son inversos aditivos del 0 y por la unicidad del inverso aditivo $0 = -0$

(b) Observemos que $(-x) + x = x + (-x) = 0$ esto quiere decir que x es inverso aditivo de $-x$ y sabemos que para cada $y \in F$ existe $-y \in F$ tal que $y + (-y) = 0$ de manera que el inverso aditivo de $-x$ debe ser $-(-x)$ y por unicidad del elemento inverso $-(-x) = x$

(c) Observemos que $1 \cdot 1 = 1$ y $1 \cdot 1^{-1} = 1$ esto quiere decir que $1, 1^{-1}$ son inversos multiplicativos de 1 y sabemos que para cada $y \in F,\ y \neq 0$ existe $y^{-1} \in F$ tal que $y \cdot y^{-1} = 1$ de manera que el inverso multiplicativo de 1 debe ser 1^{-1} y por unicidad del elemento inverso $1^{-1} = 1$
Por otro lado $1^{-1} + (-1^{-1}) = 0$ y $1 + (-1) = 0$ según el inciso anterior $1^{-1} = 1$ por lo que $1^{-1} + (-1^{-1}) = 1^{-1} + (-1)$ y por ley de la cancelación $-1 = -1^{-1}$

(d) Sea $x \in F$,tenemos entonces

$$x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0$$

por lo tanto $x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0$ y por ley de cancelación $x \cdot 0 = 0$

(e) $\Rightarrow$ Sea $xy = 0$. Supongamos que $x \neq 0$. Entonces por (M_4), $\exists\ x^{-1} \in\ F$, y

$$x^{-1}(xy) = x^{-1} \cdot 0 = 0$$

usando la ley asociativa

$$(x^{-1}x)y = 0 \ \Rightarrow \ 1 \cdot y = 0 \ \Rightarrow \ y = 0$$

por lo tanto, $x \neq 0 \ \Rightarrow \ y = 0$ esto es $x = 0$ o $y = 0$
$\Leftarrow$ Observamos que si $x = 0$ o $y = 0$ entonces $xy = 0$ por (d) y (M_1)

(f) Supongamos que $x \neq 0 \;\Rightarrow$. Entonces $xx^{-1} = 1$ y por (d) $x^{-1} \neq 0$
Por otro lado

$x{\cdot}x^{-1} = x^{-1}{\cdot}x = 1$ y $(x^{-1})^{-1}{\cdot}x^{-1} = 1 \;\;\therefore\;\; x = (x^{-1})^{-1}$ *por unicidad de inverso multiplicativo*

(g) Supongamos que $xy = 0$ por (e) se tiene que $x = 0$ o $y = 0$. Pero si $x \neq 0$ entonces $y = 0$ contradicción.
Por otro lado si $y \neq 0$ entonces $x = 0$ lo cual euna contradicción. Por lo tanto $xy \neq 0$
Por otro lado

$$\left\{\begin{matrix} (xy)\cdot(xy)^{-1} = 0 \\ xy\cdot x^{-1}y^{-1} = xyy^{-1}x^{-1} = xx^{-1} = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \;\; x^{-1}y^{-1} = (xy)^{-1}$$

por la unicidad de inversos

(h) Observemos que $x + (-1)x = 1\cdot x + (-1)x = [+1 + (-1)]\cdot x = 0\cdot x = 0$ por lo tanto $(-1)x$ es inverso aditivo de x y a tal inverso se le denoto -x, por lo tanto $(-1)x = -x$

(i) Usando (h) y (M_2) tenemos que $(-x)y = [(-1)x]y = (-1)xy = -(xy)$.
Similarmente $x(-y) = x[(-1)y] = [(-1)xy] = (-x)y$

(j) por (h) y (a) tenemos $(-1)(-1) = -(-1) = 1$

(k) Por (h), (j) y (M4) tenemos que $(-x)(-y) = (-1)x(-1)y = (-1)(-1)xy = 1\cdot xy = xy$

$\square$