Axiomas de orden

Definición 1. *un campo de F se dice que está ordenado con respecto a un determinado subconjunto $P \subset F$ si el subconjunto P satisface los siguientes axiomas*

(O_1) $\forall\ x, y\ \in\ P,\ x + y \in\ P$ *(P es cerrado bajo $+$)*

(O_2) $\forall\ x, y\ \in\ P,\ x \cdot y \in\ P$ *(P es cerrado bajo $\cdot$)*

(O_3) $\forall\ x\ \in\ F$, *ocurre una y solo de las siguientes*

$$x \in\ P, \quad -x \in\ P, \quad o \quad x = 0 \quad Ley\ \ de\ \ Tricotomia$$

Definición 2. *Si $x \in\ P$ decimos que x es positivo, si $-x \in P$ decimos que x es negativo. Por lo tanto, la ley de tricotomía dice que cada elemento de un campo ordenado puede ser positivo, negativo o cero, pero no más de una de ellas*

Definición 3. *Dados x, y en un campo ordenado F decimos que x e y tienen el mismo signo si $x, y \in P$ o $-x, -y \in P$ decimos que x e y tienen signos opuestos si $-x, y \in P$ o $x, -y \in P$*

Definición 4. *(Mayor que, Menor que, etc.) Definimos los simbolos $<$, $<$, $\leq$, $\geq$ en un campo ordenado F de la siguiente manera $x < y$ si $y - x \in P$*
$x > y$ si $y < x$
$x \leq y$ si $x < y$ o $x = y$
$x \geq y$ si $x > y$ o $x = y$

Teorema 1. *Sean x, y elementos de un campo ordenado F. Entonces*
(a) $x > 0$ si y solo si $x \in P$; $x < 0$ si y solo si $-x \in P$.
(b) Una y solo una de las siguientes propiedades se cumple

$$x < y, \quad x > y, \quad x = y$$

(c) $x \leq y$ si y solo si $x \not> y$, $\quad x \geq y$ si y solo si $x \not< y$
(d) Si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$

Demostración. **(a)** Tenemos que

$$0 < x \ \Leftrightarrow\ x - 0 \in\ P \ \Leftrightarrow\ x + (-0) \in\ P \ \Leftrightarrow\ x + 0 \in\ P \ \Leftrightarrow\ x \in\ P$$

$$x < 0 \ \Leftrightarrow\ 0 - x \in\ P \ \Leftrightarrow\ -x + 0 \in\ P \ \Leftrightarrow\ -x \in\ P$$

(b) Por O_3 ocurre solo una de las siguientes

$$y - x \in\ P, \quad x - y \in\ P, \quad y - x = 0$$

(c) Tenemos que

$$x \leq y \ \Leftrightarrow\ x < y \ \ o \ \ x = y \ \Rightarrow\ \begin{Bmatrix} si \ \ x < y \ \ entonces \ \ x \not> y \\ si \ \ x = y \ \ entonces \ \ x \not> y \end{Bmatrix} \ \Rightarrow\ x \not> y$$

$$x \geq y \ \Leftrightarrow\ x > y \ \ o \ \ x = y \ \Rightarrow\ \begin{Bmatrix} si \ \ x > y \ \ entonces \ \ x \not< y \\ si \ \ x = y \ \ entonces \ \ x \not< y \end{Bmatrix} \ \Rightarrow\ x \not< y$$

(d) Supongamos que $x \leq y$ y $y \leq x$. Por contradicción suponemos que $x \neq y$. Entonces por hipótesis se cumple $x > y$ y $y < x$ y esto no puede ocurrir por tricotomia

□

Teorema 2. *En algún campo ordenado F se cumple*
(a) La suma de dos elementos negativos es negativo
(b) El producto de dos elementos negativos es positivo
(c) El cuadrado de un elemento diferente de cero es positivo
(d) El producto de un elemento positivo y un elemento negativo es negativo
(e) $\forall\ x, y \in\ F$, si $xy > 0$, entonces x e y tienen el mismo signo
(f) $\forall\ x, y \in\ F$,si $xy < 0$, entonces x e y tienen diferente signo

Demostración. **(a)** Supongamos que x,y son elementos negativos. Por definición $-x \in P$ y $-y \in P$ por O_1 se tiene que $(-x) + (-y) \in\ P$ esto es $-(x + y) \in P$. Por definición de negativo se tiene que $x + y$ es negativo

(b) Tenemos que

$$x, y\ \ negativos\ \ \Rightarrow\ \ -x, -y \in P\ \Rightarrow\ (-x)(-y) \in P\ \Rightarrow\ xy \in P$$

(c) Supongamos $x \neq 0$. Por tricotomia $x \in P$ o $-x \in P$ entonces
Caso 1
$x \in P\ \Rightarrow\ x^2 \in P$
Caso 2
$-x \in P\ \Rightarrow\ (-x)^2 \in P\ \ pero\ \ (-x)^2 = x^2$

(d) Supongamos que $x \in P$ y $-y \in P$ por lo tanto $(x)(-y) \in P\ \Rightarrow\ -xy \in P\ \Rightarrow\ xy\ \ es\ \ negativo$

(e) Supongamos que $xy > 0$. Entonces $x, y \neq 0$ si x, y no tienen el mismo signo a lo más uno es positivo y otro negativo y el producto de estos elementos es negativo según (d)

(f) Supongamos que $xy > 0$ entonces $-xy \in P$ esto quiere decir que $(-x) \in P$ y $y \in P$ o $x \in P$ y $-y \in P$ pues $-xy = (-x)(y) = (x)(-y)$ y por lo tanto x, y tiene signos contrarios

□

Corolario 1. *1>0*

Demostración. Tenemos que

$$1 = 1^2\ \ y\ \ 1 \neq 0\ \Rightarrow\ 1 > 0$$

□

Teorema 3. *En algún campo ordenado F, se cumplen las siguientes propiedades $\forall\ x, y, z \in F$ (a) Si $x < y$, y $y < z$, entonces $x < z$*
(b) $x < y$ si y solo si $x + z < y + z$; similarmente, $x < y$ si y solo si $x - z < y - z$
(c) Si $z > 0$, entonces $x < y\ \Rightarrow\ xz < yz$
(d) Si $z < 0$, entonces $x < y\ \Rightarrow\ xz > yz$
(e) Si $x, y > 0$, entonces $x < y\ \Rightarrow\ x^2 < y^2$

Demostración. **(a)** Suponga que $x < y$ y $y < z$. Por definición, esto quiere descir $y - x \in P$ y $z - x \in P$, entonces

$$z - x = z + 0 - x = z + (-y + y) - x = (z - y) + (y - z) \in P \quad \therefore \quad x < z$$

(b) Si $x < y$ entonces $y - x \in P$ por otro lado

$$y-x = y-x+0 = y-x-z+z = y+z-x-z = y+z-(x+z) \quad \therefore \quad y+z-(x+z) \in P \quad \therefore \quad x+z < y+z$$

(c) Supongamos $z > 0$ y $x < y$. Por definición, $z \in P$ y $y-x \in P$ por O_2 $(y-x)z \in P$ esto es $yz-xz \in P$ esto quiere decir $xz < yz$

(d) Supongamos que $z < 0$ tenemos entonces que $-z \in P$ y si $x < y \Rightarrow y - x \in P$ según O_2 se tiene

$$(-z)(y - x) \in P \;\Rightarrow\; (-z)y + (-z)(-x) \in P \;\Rightarrow\; -zy + xz \in P \;\Rightarrow\; zy < zx$$

(e) Supongamos que $x, y > 0$
$\Rightarrow$

$$x < y \;\Rightarrow\; x^2 < xy \;\; y \;\; también \;\; x < y \;\Rightarrow\; xy < y^2 \quad \therefore \quad x^2 < xy < y^2 \;\; por \;\; lo \;\; que \;\; x^2 < y^2$$

Supongamos que $x, y > 0$
$\Leftarrow$

$$x^2 < y^2 \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 \in P \;\Rightarrow\; y \;\; como \;\; y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) \;\; entonces \;\; (y - x)(y + x) \in P$$

Al ser $x, y > 0$ debe ocurrir que $(y + x) > 0$ y por lo tanto $y - x \in P$ esto quiere decir que $x < y$

□

Corolario 2. *(a) Si $x > 0$, entonces $x^{-1} > 0$; si $x < 0$, entonces $x^{-1} < 0$*
(b) Si ambos lados de una desigualdad se dividen por un elemento positivo, la desigualdad se preserva
(c) Si ambos lados de una desigualdad se dividen por un elemento negativo, la desigualdad se invierte

Demostración. **(a)** Tenemos que $x \cdot x^{-1} = 1 > 0$ por lo tanto x, x^{-1} tienen el mismo signo, analogamente si $x < 0$ y $x \cdot x^{-1} = 1 > 0$ entonces x, x^{-1} deben tener el mismo signo y por tanto $x^{-1} < 0$

(b) Sea $z \in F$ tal que $z > 0$ entonces $z^{-1} \in P$ por lo tanto

$$x < y \;\Rightarrow\; y-x \in P \; y \;\; como \;\; z^{-1} \in P \;\; entonces \;\; (y-x)z^{-1} \in P \;\Rightarrow\; yz^{-1}-xz^{-1} \in P \;\Rightarrow\; xz^{-1} < yz^{-1}$$

$$\Rightarrow\; x \div z < y \div z$$

(c) Sea $z \in F$ tal que $z < 0$ entonces $z^{-1} \notin P$ y por tanto $-z^{-1} \in P$

$$x < y \;\Rightarrow\; y-x \in P \; y \;\; como \;\; -z^{-1} \in P \;\; entonces \;\; (y-x)(-z^{-1}) \in P \;\Rightarrow\; -yz^{-1}+xz^{-1} \in P \;\Rightarrow\; yz^{-1} < xz^{-1}$$

$$\Rightarrow\; y \div z < x \div z$$

□

Teorema 4. *Propiedades de las desigualdades En algún campo ordenado F, se cumplen las siguientes propiedades*
(a) $0 < x < y \ \Rightarrow\ 0 < y^{-1} < x^{-1}$
(b) Si $x < y$ *y* $u < v$ *entonces* $x + u < y + v$
(c) Si $0 < x < y$ *y* $u < v$ *entonces* $xu < yv$ *y* $\frac{x}{v} < \frac{y}{u}$
(d) Si $x < y$, *entonces* $x < \frac{x+y}{2} < y$

Demostración. **(a)** $\Rightarrow$ Supongamos que $0 < x < y$ por el corolario se tiene $x^{-1} > 0$ y $y^{-1} > 0$. Entonces $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} > 0$. Multiplicamos ahora ambos miembros de la desigualdad

$$x < y \ \Rightarrow\ x(x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1}) \ \Rightarrow\ (xx^{-1})y^{-1} < (yy^{-1}x^{-1}) \ \Rightarrow\ y^{-1} < x^{-1}$$

$\Leftarrow$ Supongamos que $0 < x^{-1} < y^{-1}$ por el corolario se tiene $x = (x^{-1})^{-1} > 0$ y $y = (y^{-1})^{-1} > 0$. Entonces $xy > 0$. Multiplicamos ahora ambos miembros de la desigualdad

$$y^{-1} < x^{-1} \ \Rightarrow\ y^{-1}xy < x^{-1}xy \ \Rightarrow\ (yy^{-1})x < (xx^{-1})y \ \Rightarrow\ x < y$$

(b) Tenemos que

$$x < y,\quad u < v,\ \Rightarrow\ (y-x),\ (v-u) \in P \ \Rightarrow\ (y-x)+(v-u) \in p \ \Rightarrow\ (y+v)-(x+u) \in P \ \Rightarrow\ x+u < y+v$$

(c) suponga que $0 < x < y$ y $0 < u < v$. Entonces $u > 0$, multiplicamos ambos miembros de la desigualdad

$$x < y \ \Rightarrow\ xu < yu$$

Analogamente $y > 0$, multiplicamos ambos miembros de la desigualdad

$$u < v \ \Rightarrow\ yu < yv$$

por la propiedad trasitiva

$$xu < yu < yv \ \Rightarrow\ xu < yv$$

Tenemos que si $u < v$ entonces $v^{-1} < u^{-1}$ y usando lo anterior se tiene

$$x < y \ \Rightarrow\ xv^{-1} < yu^{-1} \quad \frac{x}{v} < \frac{y}{u}$$

(d) Según (b)

$$x < y \ \Rightarrow\ x + x < x + y \textit{ también } x < y \ \Rightarrow\ x + y < y + y \ \Rightarrow\ 2x < x + y < 2y \ \Rightarrow\ x < \frac{x+y}{2} < y$$

$\square$

Teorema 5. *Máximo, Mínimo (a) Un campo ordenado no tiene ningún elemento más grande*
(b) Un campo ordenado no tiene elemento positivo más pequeño
(c) Cualquier campo ordenado p (y, por consiguiente F mismo) es un conjunto infinito

Demostración. **(a)** Sea F un campo ordenado. Sea $x \in F$ tal que x es el elemento mas grande de F, de la desigualdad $0 < 1$ podemos sumar de ambos lados x y se tiene $x < x + 1$ por tanto x no puede ser el elemento mas grande.

(b) Si $x \in F$ es el elemento de F positivo más pequeño entonces $0 < x$ y según (d) se tendria que

$$0 < \frac{x}{2} < x$$

por tanto x no puede ser el menor elemento positivo de F.

(c) Supongamos que F es un campo ordenado. Entonces $1 \in F$ y como F es cerrado bajo suma entonces F contiene los elementos

$$1,\ 1+1,\ 1+1+1,\ 1+1+1+1,\ ...$$

y se tiene que

$$1 < 1+1 < 1+1+1 < 1+1+1+1 < ...$$

Por la propiedad transitiva, cada elemento sucesivo en la lista anterior es más grande de todos los elementos anteriores en la lista, por lo que todos sus elementos son diferentes. Ya que no hay fin a la cantidad de veces que podemos añadir 1, la lista deberá contener un número infinito de elementos diferentes. Por lo tanto, P debe ser un conjunto infinito

$\square$