Propiedad de Completez

Definición 1. *Supongamos que F es un campo ordenado, $A \subseteq F$ y $u \in F$. Decimos que*

1. *u es una cota superior de A si,*
$$\forall\, x \in A \quad se \quad cumple \quad x \leq u$$
2. *u es una cota inferior de A si,*
$$\forall\, x \in A \quad se \quad cumple \quad x \geq u$$
3. *u es un máximo de A si,*
$$u \in A, \quad y \quad \forall\, x \in A \quad se \quad cumple \quad x \leq u$$
4. *u es un mínimo de A si,*
$$u \in A, \quad y \quad \forall\, x \in A \quad se \quad cumple \quad x \geq u$$

Un subconjunto A de un campo ordenado F se denomina acotado superiormente (respectivamente acotado inferiormente), si A tiene alguna cota superior (respectivamente inferior). Se dice que A es acotado si lo es superior e inferiormente.

Ejercicio Supongamos que existen números reales y se comportan de acuerdo con las reglas familiares de álgebra. Para cada uno de los siguientes conjuntos de números reales, indique si el conjunto dado está o no acotado superiormente. Para aquellos que son, da una cota superior diferente y encuentra la cota superior mínima.

1. $A = (1, 3]$
2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$
3. $A = (-\infty, 0]$
4. $A = \emptyset$
5. $A = \left\{ \dfrac{1}{x} \mid x > 0 \right\}$
6. $A = \left\{ 2 - \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$
7. $A = \left\{ \dfrac{x+1}{x} \mid x > 2 \right\}$

Solución En este caso

1. El conjunto A esta acotado superiormente por $3, 4, 86$ y una cota superior mínima sería 3
2. El conjunto A esta acotado superiormente por $4, 4{,}01, 86$ y una cota superior mínima sería 4
3. El conjunto A esta acotado superiormente por $0, 0{,}2, 86$ y una cota superior mínima sería 0
4. El conjunto A esta acotado superiormente por $-100, 0, 25$ y no tiene una cota superior mínima
5. No esta acotado superiormente

6. El conjunto A esta acotado superiormente por $2, 3, 86$ y una cota superior mínima sería 2
7. El conjunto A esta acotado superiormente por $2, 3, 86$ y una cota superior mínima sería 1.5

Ejercicio Para cada uno de los conjuntos enumerados en el ejercicio anterior, indique si el conjunto dado está acotado inferiormente o no a continuación. Para aquellos que son, dar tres cotas inferiores diferentes y encontrar la cota inferior más grande

1. $A = (1, 3]$
2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$
3. $A = (-\infty, 0]$
4. $A = \emptyset$
5. $A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x > 0 \right\}$
6. $A = \left\{ 2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$
7. $A = \left\{ \frac{x+1}{x} \mid x > 2 \right\}$

Solución En este caso

1. El conjunto A esta acotado inferiormente por $-1, -2, -100$ y una cota inferior máxima sería -1
2. El conjunto A esta acotado inferiormente por $1, 0, -20$ y una cota inferior máxima sería 1
3. El conjunto A no esta acotado inferiormente
4. El conjunto A esta acotado inferiormente por $-100, 0, 25$ y no tiene una cota inferior máxima
5. El conjunto A esta acotado inferiormente por $0, -1, -100$ y una cota inferior máxima sería 0
6. El conjunto A esta acotado inferiormente por $1, 0, -100$ y una cota inferior máxima sería 1
7. El conjunto A esta acotado inferiormente por $2, 1, -100$ y una cota inferior máxima sería 1

Teorema 1. *Tenemos que*

a) Un conjunto A puede tener más de una cota superior y más de una cota inferior

b) Un conjunto no puede tener más de un elemento máximo ni más de un elemento mínimo

c) Cada conjunto finito no vacío tiene un elemento máximo y un elemento mínimo

Demostración. En este caso

a) El ejercicio anterior muestra esto.

b) Supongamos que $u = \text{máx}\, A$ y $v = \text{máx}\, A$. Entonces

   a) $u \in A$, y $\forall\, x \in A,\ x \leq u$

   b) $v \in A$, y $\forall\, x \in A,\ x \leq v$

en (1) podemos tener $x = v$ y por tanto $v \leq u$. En (2) podemos tener $x = u$ y por tanto $u \leq v$. Por lo tanto $u = v$.
Ahora supongamos que $u = \text{mín}\, A$ y $v = \text{mín}\, A$. Entonces

a) $u \in A$, y $\forall\, x \in A,\; x \geq u$

b) $v \in A$, y $\forall\, x \in A,\; x \geq v$

en (1) podemos tener $x = v$ y por tanto $v \geq u$. En (2) podemos tener $x = u$ y por tanto $u \geq v$. Por lo tanto $u = v$.

c) Supongamos que S es un conjunto finito no vacío de F. Esto es, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que

$$S = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

Para probar que S tiene un elemento máximo, usamos inducción matematica sobre n

a) (1) Un conjunto con un solo elemento $S = \{x_1\}$ tiene elemento máximo $x_1 = \text{máx}\, S$

b) (2) Supongamos que un conjunto con k elementos tiene un elemento máximo. Sea S un conjunto con $k + 1$ elementos, decimos

$$S = \{x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}\}$$

Entonces el conjunto $T = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ tiene elemento máximo digamos $t = \text{máx}\, T$. Por ley de tricotomía, podemos tener

$$u = \text{máx}\{t, x_{k+1}\}$$

Entonces $u \in S$, y $\forall\, x \in S$, $x \leq u$. Por lo tanto $u = \text{máx}\, S$. Por lo tanto, cualquier conjunto con k + 1 elementos tiene un elemento máximo.

Para el elemento mínimo la prueba es análoga.

□

Un conjunto finito, incluso cuando está acotado, puede o no tener un elemento máximo o mínimo. Por ejemplo, un intervalo abierto (a, b) no tiene un elemento mínimo ni un elemento máximo. Sin embargo, aunque a y b no son elementos mínimos o máximos de (a, b), hay algo especial sobre a y b. En el lenguaje técnico, decimos que a es la cota inferior más grande de (a, b) y b es la cota superior mínima de (a, b). Ahora definimos estos términos técnicos.

Supremo e Infimo de un conjunto

Definición 2. *Suponga que F es un campo ordenado y $A \subset F$. Decimos que un elemento $u \in F$ es*

1. *Una cota superior mínima (supremo) de A, si u es una cota superior de A y para toda cota superior v de A se tiene $u \leq v$. Lo denotamos*
$$\sup\; A$$

2. *Una cota inferior máxima (infimo) de A, si u es una cota inferior de A y para toda cota inferior v de A se tiene $v \leq u$. Lo denotamos*
$$\text{ínf}\; A$$

Teorema 2. *Sea $a < b$ en un campo ordenado F. Entonces*

$$a = \text{ínf}(a,b), \quad y \quad b = \sup(a,b)$$

Demostración. Primero probaremos que $a = \text{ínf}(a,b)$

I) Por definición de (a,b) se tiene que a es cota inferior de (a,b).

II) Supongamos ahora que v es una cota inferior de (a,b). Tenemos que probar que $v \leq a$. Esto lo haremos por contradicción, supondremos que $a < v$. Dado que v es cota inferior de (a,b) y $\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \in (a,b)$, tenemos que

$$a < v \leq \frac{a+b}{2} < b$$

Sea $c = \dfrac{a+v}{2}$. Se tiene entonces que $a < c < v < b$. Por lo que $c \in (a,b)$ y $c < v$. Pero v es cota inferior de (a,b). (Contradicción). Por lo tanto $a \geq v$

Ahora probaremos que $b = \sup(a,b)$

I) Por definición de (a,b) se tiene que b es cota superior de (a,b).

II) Supongamos ahora que u es una cota superior de (a,b). Tenemos que probar que $b \leq u$. Esto lo haremos por contradicción, supondremos que $u < b$. Dado que u es cota superior de (a,b) y $\left(\dfrac{b+u}{2}\right) \in (a,b)$, tenemos que

$$a < u \leq \frac{b+u}{2} < b$$

Sea $c = \dfrac{b+u}{2}$. Se tiene entonces que $a < u < c < b$. Por lo que $c \in (a,b)$ y $u < c$. Pero u es cota superior de (a,b). (Contradicción). Por lo tanto $b \geq u$

□