Supremos e ínfimos

Definición 1. *Suponga que F es un campo ordenado y $A \subset F$. Decimnos que un elemento $u \in F$ es*
(1) Una mínima cota superior (supremo) de A, si u es una cota superior de A y para toda cota superior v de A se tiene $u \leq v$. Lo denotamos

$$\sup \ A$$

(2) Una máxima inferior (infimo) de A, si u es una cota inferior de A y para toda cota inferior v de A se tiene $v \leq u$. Lo denotamo

$$\text{ínf} \ A$$

Teorema 1. *Tenemos que*

1. *Un conjunto A no puede tener más de una máxima cota inferior*
2. *Un conjunto A no puede tener más de una mínima cota superior*
3. *Un conjunto que contiene una máxima cota inferior (ó una mínima cota superior) tiene en ese elemento un mínimo (ó un máximo)*

Demostración. En este caso

1. Sean $u = \text{ínf} \ A$ y $u' = \text{ínf} \ A$ y tenemos que
   I) $u = \text{ínf}\, A$ y u' cota inferior de A entonces $u' \leq u$
   II) $u' = \text{ínf}\, A$ y u cota inferior de A entonces $u \leq u'$

   de (i) y (ii) se tiene $u = u'$
2. Sean $u = \sup \ A$ y $u' = \sup \ A$ y tenemos que
   I) $u = \sup A$ y u' cota superior de A entonces $u \leq u'$
   II) $u' = \sup A$ y u cota superior de A entonces $u' \leq u$

   de (i) y (ii) se tiene $u = u'$
3. Si $u = \text{ínf}\, A \in A$ y entonces $\forall \ a \in A$, $a \geq u$. Esta es la definición de $\text{mín}\, A$.
   Si $u = \sup A \in A$ y entonces $\forall \ a \in A$, $a \leq u$. Esta es la definición de $\text{máx}\, A$.

□

Teorema 2. *ϵ Criterio del Supremo.*
Sea F un campo Arquimediano ordenado, $A \subseteq F$, y $u \in F$. Entonces $u = \sup A \iff \forall \ \epsilon > 0$

a) $\forall \ x \in A$, $x < u + \epsilon$ y

b) $\exists x \in A$ tal que $x > u - \epsilon$

Demostración. Sea F un campo ordenado, $A \subseteq F$ y $u \in F$.

1. La primera parte $(\Rightarrow)$.

- Sea $x \in A$. Entonces $x \leq \sup A = u < u + \epsilon$. Por lo que $\forall\ x \in A$, $x < u + \epsilon$
- $u - \epsilon < u$, como u es la máxima cota inferior de A, entonces $u - \epsilon$ no puede ser cota inferior de A, por lo tanto $\exists\ x \in A$ tal que $x > u - \epsilon$

2. La segunda parte ($\Leftarrow$). Supongamos que $u \in F$ satisface las condiciones (a) y (b) de la hipótesis

   I) Sea $x \in A$. Por (a), $\forall\ \epsilon > 0$, $x < u + \epsilon$. Así por el principio Forcing

   $$\forall\ \epsilon > 0,\ x \leq a + \epsilon \ \Rightarrow\ x \leq a$$

   se tiene $x \leq u$ por tanto u es una cota superior

   II) Supongamos que v es una cota superior de A. Vamos a ver que $u \leq v$. Por contradicción supondremos que $u > v$ y consideramos $\epsilon = u - v > 0$, por (b) $\exists\ x \in A$ tal que

   $$\begin{aligned} &x > u - \epsilon \\ &x > u - (u - v) \\ &x > v \end{aligned}$$

   pero v era una cota superior de A y $x \in A$ (Contradicción). Por lo tanto $u \leq v$. De (i) y (ii) se tiene $u = \sup A$

□

Teorema 3. *ϵ Criterio del Infimo.*
Sea F un campo Arquimediano ordenado, $A \subseteq F$, y $u \in F$. Entonces $u = \inf A \ \Leftrightarrow\ \forall\ \epsilon > 0$

a) $\forall\ x \in A$, $x > u - \epsilon$ y

b) $\exists x \in A$ tal que $x < u + \epsilon$

Demostración. Sea F un campo ordenado, $A \subseteq F$ y $u \in F$.

1. La primera parte ($\Rightarrow$). Supongamos que $u = \inf A$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces $\forall\ x \in A$ $x \geq u > u - \epsilon$ por lo que $u + \epsilon > u$. De manera que $u + \epsilon$ no es cota superior de A por lo que $\exists\ x \in A$ tal que $x < u + \epsilon$.

2. La segunda parte ($\Leftarrow$). Supongamos que $u \in F$ satisface las condiciones (a) y (b) de la hipótesis

   I) $\forall x \in A$, $x > u - \epsilon$.
   Según el resultado

   $$\forall\ \epsilon > 0,\ x \geq a - \epsilon \ \Rightarrow\ x \geq a$$

   se tiene $x > u$. Por tanto u es cota inferior de A.

   II) Supongamos que v es una cota inferior de A. Vamos a ver que $v \leq u$. Por contradicción supondremos que $v > u$ y consideramos $\epsilon = v - u > 0$, por (b) $\exists\ x \in A$ tal que

   $$\begin{aligned} &x < u + \epsilon \\ &x < u + (v - u) \\ &x < v \end{aligned}$$

   pero v era una cota inferior de A y $x \in A$ (Contradicción). Por lo tanto $v \leq u$. De (i) y (ii) se tiene $u = \inf A$

$\square$

Axioma de Completez

Definición 2. *Un campo ordenado F es completo si satisface*
Propiedad de Completez: Todo subconjunto no vacío de F que esta acotado superiormente ***tiene*** *una mínima cota superior (supremo)*

Precaución Recuerde que la palabra **tiene** aquí no significa contiene. El supremo de A no necesita ser miembro de A

Como veremos en breve, hay campos comunes que no están completos. Pero primero, desarrollamos algunas propiedades de campos ordenados completos

Teorema 4. *Un campo ordenado completo es arquimediano*

Demostración. Supongamos que F es un campo ordenado completo. Procedemos por contradicción, supongamos que F no es arquimediano.
Esto es, no es verdad que

$$\forall\ x > 0,\ \exists\ n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ n > x$$

que es equivalente a decir

$$\exists\ x > 0 \in\ \ F\ \ \ tal\ \ que\ \ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \ \ n \leq x$$

esto significa que el conjunto $\mathbb{N}$ de F es un conjunto no vacio acotado superiormente, al ser F completo

$$\exists\ \ x_0 = \sup\ \mathbb{N}$$

Ahora bien $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n+1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n+1 \leq x_0$$

es implica que

$$n \leq x_0 - 1$$

por lo tanto

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ \ n \leq x_0 - 1$$

por lo tanto $x_0 - 1$ es una cota superior de $\mathbb{N}$, pero x_0 era la mínima cota superior de $\mathbb{N}$ (Contradicción).
Por lo tanto F es arquimediano $\square$

Corolario 1. *El campo ordenado $\mathbb{Q}$ de los números racionales no es completo*

Demostración. Al considerar el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$$

Ya se demostrado que no existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$. Por lo que para este conjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$, no existe $\sup A$ $\square$

Definición 3. *El conjunto de números reales es un campo ordenado completo. Denotado por $\mathbb{R}$*