Valor Absoluto

Definición 1.

Sea F un campo ordenado. Para cada $x \in F$ definimos el Valor absoluto de x como:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Teorema 1. *Propiedades básicas de valor absoluto. Sea F un campo ordenado. Entonces $\forall\ x, y \in F$ se satisface*

a) $|x| \geq 0$

b) $|-x| = |x|$

c) $-|x| \leq x \leq |x|$

d) $|x - y| = |y - x|$

e) $|xy| = |x||y|$

Demostración. **(a)** Por O_3 se tiene que $x \geq 0$ ó $x < 0$

$$Si \quad x \geq 0 \quad entonces \quad |x| = x \geq 0$$

$$Si \quad x < 0 \quad entonces \quad |x| = -x \geq 0$$

(b) Por definición se tiene

$$|-x| = \begin{cases} -x & si \quad -x \geq 0 \\ -(-x) & si \quad -x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & si \quad -(-x) \leq 0 \\ -(-x) & si \quad -(-x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & si \quad x \leq 0 \\ x & si \quad x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases} = |x|$$

(c) Sea $x \in F$. Entonces $x \geq 0$ ó $x < 0$

$$Caso\,1 \ \ (x \geq 0): \quad Entonces \ \ 0 \leq x = |x|, \ \ y \ por \ tanto \ -|x| \leq 0 \leq x \leq |x| \ \ es \ decir \ -|x| \leq x \leq |x|$$

$$Caso\,2 \ \ (x < 0): \quad Entonces \ \ |x| = -x, \ \ y \ por \ tanto \ -|x| = x < 0 \leq |x| \ \ es \ decir \ -|x| \leq x \leq |x|$$

(d) Tenemos que

$$|x - y| = |-(y - x)| = |y - x|$$

(e) Se tienen cuatro casos

a) $x \geq 0$, $y \geq 0$. Entonces $xy \geq 0$ y $|xy| = xy = |x||y|$.

b) $x \geq 0$, $y < 0$. Entonces $xy \leq 0$ y $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$

c) $x < 0$, $y \geq 0$. Entonces $xy \leq 0$ y $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$

d) $x < 0$, $y < 0$. Entonces $xy > 0$ y $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$

□

Desigualdades y Valor Absoluto

Teorema 2. *Sea $a \geq 0$ un elemento no negativo fijo en un campo ordenado F. Entonces $\forall x, y \in F$ se cumplen*
(a) $|x| < a \;\Leftrightarrow\; -a < x < a$.
(b) $|x| > a \;\Leftrightarrow\; -a < x$ *ó* $x < -a$.
(c) $|x - y| < a \;\Leftrightarrow\; y - a < x < y + a$.

Demostración. **(a)** Tenemos que

$$|x| < a \Leftrightarrow \begin{cases} x < a & si \quad x \geq 0 \\ -x < a & si \quad x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a < -x \leq x < a & si \quad x \geq 0 \\ -a < x < -x < a & si \quad x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a < x < a & si \quad x \geq 0 \\ -a < x < a & si \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \; -a < x < a$$

(b) $\Rightarrow$ Suponemos que $|x| > a$.

$$Caso\ 1\ (x \geq 0): \quad Entonces \quad |x| = x, \quad y \quad x > a$$

$$Caso\ 2\ (x < 0): \quad Entonces \quad |x| = -x, \quad y \quad -x > a \quad equivale \quad a \quad x < -a$$

$\Leftarrow$ Suponemos que $x > a$ ó $x < -a$.

$$Caso\ 1\ (x > a): \quad Entonces \quad x > 0, \quad y \quad |x| = x \quad y \quad |x| > a$$

$$Caso\ 2\ (x < -a): \quad Entonces \quad -x > a.$$

pero en este caso $x < 0$ y $|x| = -x$ y por tanto $|x| > a$

(c) Tenemos que

$$|x - y| < a \;\Leftrightarrow\; -a < x - y < a \;\Leftrightarrow\; y - a < x < y + a$$

$\square$

Teorema 3. *Desigualdad del Triángulo* $\forall\ x, y$ *en un campo ordenado F, se cumplen:*

a) $|x + y| \leq |x| + |y|$

b) $|x| - |y| \leq |x - y|$

c) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

d) $||x| - |y|| \leq |x + y|$

Demostración. **(a)** Tenemos que $-|x| \leq x \leq |x|$, y $-|y| \leq y \leq |y|$ por lo tanto

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y| \quad ó \quad -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

y por lo tanto

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

(b) Tenemos que
$$|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y|+|y| \quad \therefore \quad |x|-|y| \leq |x-y|$$

(c) Según lo anterior $|x|-|y| \leq |x-y|$ y $|y|-|x| \leq |x-y|$ por lo tanto $||x|-|y|| \leq |x-y|$

(d) Tenemos que
$$|x| = |(x+y)-y| = |(x+y)+(-y)| \leq |x+y|+|-y| = |x+y|+|y| \quad \therefore \quad |x|-|y| \leq |x+y|$$

analogamente
$$|y| = |(y+x)-x| = |(y+x)+(-x)| \leq |y+x|+|-x| = |y+x|+|x| \quad \therefore \quad |y|-|x| \leq |x+y|$$

y por lo tanto
$$||x|-|y|| \leq |x+y|$$

$\square$

Intervalos

Definición 2. *Sea F un campo ordenado. Primero definimos intervalos cerrados y ampliamos esta definición para definir intervalos arbitrarios*

a) $\forall\ a, b \in F$ *definimos un intervalo cerrado* $[a, b]$ *como el conjunto*
$$[a, b] = \{x \in F \mid a \leq x \leq b\}$$

Tenga en cuenta que no requerimos que $a < b$ en esta definición. Así, por ejemplo,
$$[a, a] = \{a\}$$
y
$$[2, 1] = \emptyset$$
pues $2 \leq x \leq 1$ no ocurre.

b) *En general, un intervalo en F es algún subconjunto $I \subseteq F$ tal que $[a, b] \subseteq I$ siempre que $a, b \in I$*

Es decir, un intervalo es un conjunto que siempre contiene el intervalo cerrado completo entre dos de sus puntos. Por lo tanto, tendría sentido decir que un intervalo es un conjunto convexo en un campo ordenado.

Teorema 4. *En un campo ordenado F, los siguientes conjuntos son intervalos*

1. $[a, b] = \{x \in F \mid a \leq x \leq b\}$
2. $(a, b) = \{x \in F \mid a < x < b\}$
3. $(a, b] = \{x \in F \mid a < x \leq b\}$
4. $[a, b) = \{x \in F \mid a \leq x < b\}$

5. $(-\infty, b) = \{x \in F \mid x < b\}$

6. $(-\infty, b] = \{x \in F \mid x \leq b\}$

7. $(a, +\infty) = \{x \in F \mid a < x\}$

8. $[a, +\infty) = \{x \in F \mid a \leq x\}$

9. $(-\infty, +\infty) = F$

Demostración. Tenemos que

a) Por definición el conjunto $\{x \in F \mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$ es un intervalo

b) Consideremos el intervalo cerrado $[a+\epsilon, b-\epsilon]$ $\forall\ \epsilon > 0$ y notemos que $\forall\ x \in [a+\epsilon, b-\epsilon]$ se cumple $a < a+\epsilon \leq x \leq b-\epsilon < b$ por lo tanto

$$[a+\epsilon, b-\epsilon] \subset (a, b)$$

y como $a+\epsilon, b-\epsilon \in (a, b)$ entonces el conjunto $(a, b) = \{x \in F \mid a < x < b\}$ es un intervalo

c) Consideremos el intervalo cerrado $[a+\epsilon, b]$ $\forall\ \epsilon > 0$ y notemos que $\forall\ x \in [a+\epsilon, b]$ se cumple $a < a+\epsilon \leq x \leq b$ por lo tanto

$$[a+\epsilon, b] \subset (a, b]$$

y como $a+\epsilon, b \in (a, b]$ entonces el conjunto $(a, b] = \{x \in F \mid a < x \leq b\}$ es un intervalo

d) Consideremos el intervalo cerrado $[a, b-\epsilon]$ $\forall\ \epsilon > 0$ y notemos que $\forall\ x \in [a, b-\epsilon]$ se cumple $a \leq x \leq b-\epsilon < b$ por lo tanto

$$[a, b-\epsilon] \subset [a, b)$$

y como $a, b-\epsilon \in [a, b)$ entonces el conjunto $[a, b) = \{x \in F \mid a \leq x < b\}$ es un intervalo

e) Consideremos el intervalo cerrado $[-n, b-\epsilon]$ $\forall\ \epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ y notemos que $\forall\ x \in [-n, b-\epsilon]$ se cumple $-\infty < -n \leq x \leq b-\epsilon < b$ por lo tanto

$$[-n, b-\epsilon] \subset (-\infty, b)$$

y como $-n, b-\epsilon \in (-\infty, b)$ entonces el conjunto $(-\infty, b) = \{x \in F \mid x < b\}$ es un intervalo

f) Consideremos el intervalo cerrado $[-n, b]$ $n \in \mathbb{N}$ y notemos que $\forall\ x \in [-n, b]$ se cumple $-\infty < -n \leq x \leq b$ por lo tanto

$$[-n, b] \subset (-\infty, b]$$

y como $-n, b \in (-\infty, b]$ entonces el conjunto $(-\infty, b] = \{x \in F \mid x \leq b\}$ es un intervalo

g) Consideremos el intervalo cerrado $[a+\epsilon, n]$ $\forall\ \epsilon > 0,\ n \in \mathbb{N}$ y notemos que $\forall\ x \in [a+\epsilon, n]$ se cumple $a < a+\epsilon \leq x \leq n < \infty$ por lo tanto

$$[a+\epsilon, n] \subset (a, \infty)$$

y como $a+\epsilon, n \in (a, \infty)$ entonces el conjunto $(a, \infty) = \{x \in F \mid a < x\}$ es un intervalo

h) Consideremos el intervalo cerrado $[a, n],\ n \in \mathbb{N}$ y notemos que $\forall\ x \in [a, n]$ se cumple $a \leq x \leq n < \infty$ por lo tanto

$$[a, n] \subset [a, \infty)$$

y como $a, n \in [a, \infty)$ entonces el conjunto $(a, \infty) = \{x \in F\ |a \leq x\}$ es un intervalo

i) Consideremos el intervalo cerrado $[-n, n],\ n \in \mathbb{N}$ y notemos que $\forall\ x \in [-n, n]$ se cumple $-\infty < -n \leq x \leq n < \infty$ por lo tanto

$$[-n, n] \subset (-\infty, \infty)$$

y como $-n, n \in (-\infty, \infty)$ entonces el conjunto $(-\infty, \infty) = F$ es un intervalo

$\square$