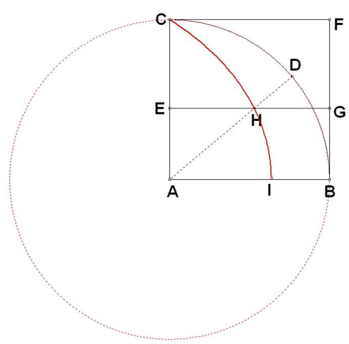
Cuadrando el círculo

Dinostrato Utilizó la cuadratriz (una curva inventada por el sofista Hippias para la división del ángulo) para resolver el problema de la cuadratura del círculo. Hipias descubrio esta curva, pero fue más tarde fue Dinostrato el primero en usarla para encontrar un área igual a un determinado círculo.

Generación de la cuadratriz.

Supongamos inscrito en el cuadrado $CABF$ un arco de circunferencia $\widehat{CB}$ con centro A (ver figura 1).

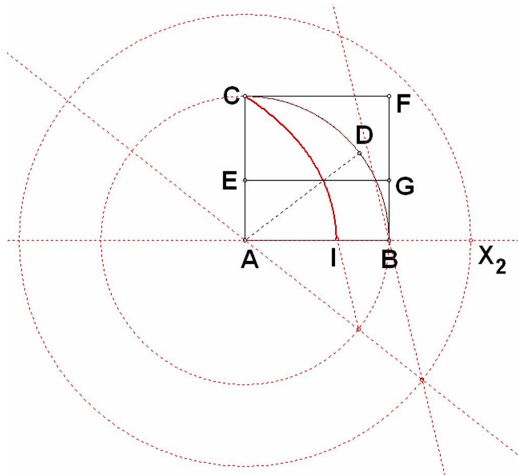
Sea D un punto que parte de C y se desplaza por el arco $\widehat{CB}$ a velocidad uniforme. Sea E un punto que parte de C en el mismo momento que D y se desplaza por el segmento CA a velocidad uniforme y de forma que el tiempo en que E recorre CA es el mismo que el tiempo en que D recorre el arco CB. El punto H, en que se cortan la perpendicular a AC por D y la recta AD, describe la curva llamada cuadratriz.



La propiedad del punto I que permite rectificar la circunferencia y cuadrar el círculo es que $\frac{A\widehat{C}B}{AB} = \frac{AB}{AI}$, o, dicho en palabras, la longitud del arco $\widehat{CB}$ es a la longitud del segmento AB como la longitud del segmento AB es a la longitud del segmento AI. Se tiene que

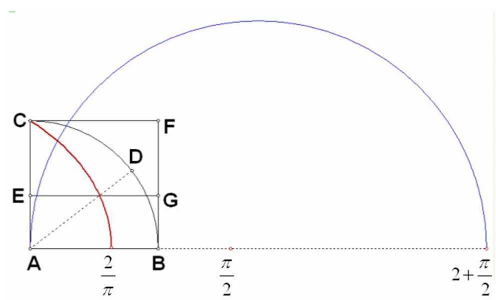
$$A\widehat{C}B = r * \theta = 1 * \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad y \quad AB = 1 \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{1}{AI} \Rightarrow AI = \frac{2}{\pi}$$

Por otro lado usando el teorema de tales vamos a encontrar el punto $\frac{\pi}{2}$ se tiene que

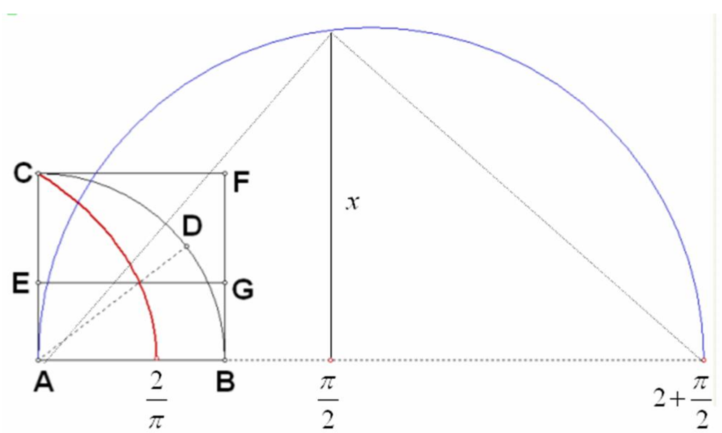


$$\frac{\frac{2}{\pi}}{1} = \frac{1}{1+x_2} \Rightarrow 1 + x_2 = \frac{\pi}{2}$$

Al punto $\frac{\pi}{2}$ le sumamos 2 unidades y construimos la semicircunferencia con centro en el punto medio de A y $2 + \frac{\pi}{2}$

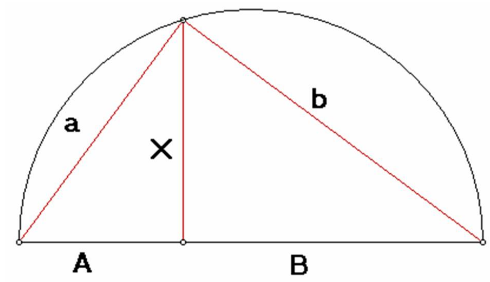


Posteriormente dibujamos el segmento **X** que corta a la semicircunferencia



El teorema de la altura nos da la relacion en un triangulo de la altura sobre la hipotenusa y los segmentos que determina sobre la misma o proyecciones.

Teorema 1. *En un triangulo rectangulo el cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.*

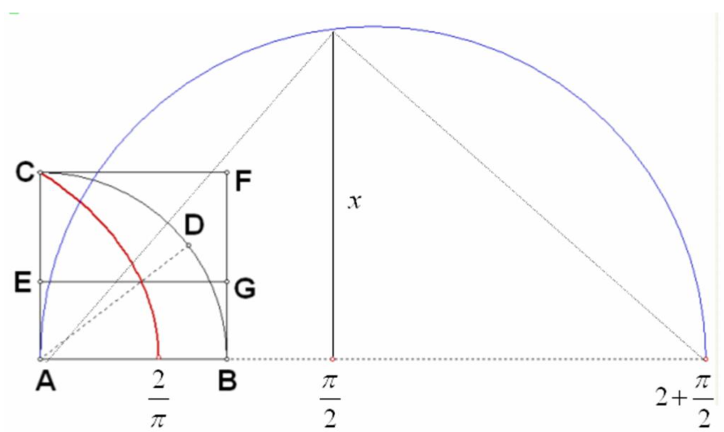


Demostración. tenemos que segun la figura $x^2 = a^2 - A^2$ y tambien $x^2 = b^2 - B^2$ por tanto si sumamos se tiene que $2x^2 = b^2 + a^2 - A^2 - B^2$ por otro lado $a^2 + b^2 = (A + B)^2$ por lo que sustituyendo se tiene que

$$2x^2 = b^2 + a^2 - A^2 - B^2 \Rightarrow 2x^2 = A^2 + 2AB + B^2 - A^2 - B^2 \Rightarrow 2x^2 = 2AB \Rightarrow \frac{x}{A} = \frac{B}{x}$$

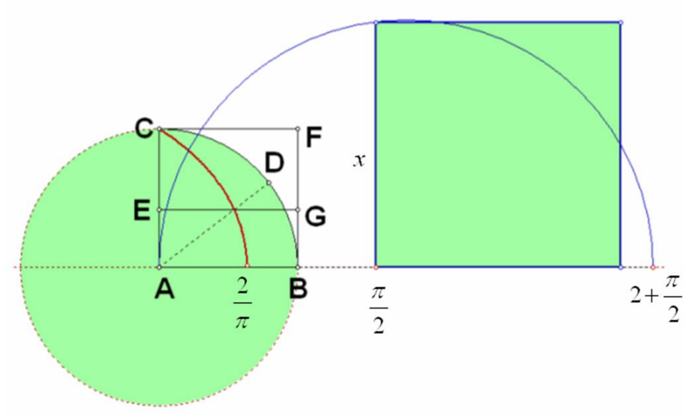
□

Aplicando el teorema de la altura se tiene que



$$\frac{x}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 = \pi \Rightarrow x = \sqrt{\pi}$$

∴ el cuadrado formado por x tiene área=π que es la misma que el área del círculo



C
F
D
x
E
G
A
2/π
B
π/2
2+π/2