Independencia lineal de dos funciones

Definición 1. *Un par de soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la ecuación*

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1}$$

*son **linealmente independientes en el intervalo I** si y sólo si ninguna de ellas es un múltiplo constante de la otra en I. Decimos que y_1 y y_2 son **linealmente dependientes en I** si una de ellas es un múltiplo constante (incluyendo al cero) de la otra en I.*

Teorema 1. *Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son dos soluciones cualesquiera a la ecuación diferencial homogénea (1), linealmente independientes en un intervalo I que contenga a x_0, entonces se pueden determinar constantes únicas c_1 y c_2 tales que*

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

satisfaga el problema con valores iniciales

$$ay'' + by' + cy = 0; \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \tag{2}$$

en I.

Lema 1. *Para cualesquiera números reales ($a \neq 0$), b y c si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación diferencial (1) en un intervalo I y se cumple la igualdad*

$$y_1(\tau)y_2'(\tau) - y_1'(\tau)y_2(\tau) = 0$$

*en cualquier punto τ de I, entonces y_1 y y_2 son linealmente dependientes en I. (La expresión del lado izquierdo se llama el **Wronskiano** de y_1 y y_2 en el punto τ;*

Demostración. Tenemos los casos

a) Caso 1. Si $y_1(\tau) \neq 0$, hagamos $\kappa = \dfrac{y_2}{\tau}$ y consideremos la solución dada por $y(x) = \kappa y_1(x)$. Ésta satisface las mismas condiciones iniciales en $x = \tau$ que $y_2(x)$:

$$y(\tau) = \frac{y_2(\tau)}{y_1(\tau)}\, y_1(\tau) = y_2(\tau); \quad y'(\tau) = \frac{y_2(\tau)}{y_1(\tau)}\, y_1'(\tau) = y_2'(\tau)$$

donde la última igualdad es consecuencia de (1). Por unicidad, $y_2(x)$ debe ser la misma función que $\kappa\, y_1(x)$ en I.

b) Caso 2. Si $y_1(\tau) = 0$ pero $y_1(\tau) \neq 0$, entonces (1) implica que $y_2(\tau) = 0$. Sea $\kappa = \dfrac{y_2'(\tau)}{y_1'(\tau)}$. Entonces la solución dada por $y(x) = ky_1(x)$ (de nuevo) satisface las mismas condiciones iniciales en $x = \tau$ que $y_2(x)$:

$$t(\tau) = \frac{y_2'(\tau)}{y_1'(\tau)}y_1(\tau) = 0 = y_2(\tau); \quad y'(\tau) = \frac{y_2'(\tau)}{y_1'(\tau)}y_1'(\tau) = y_2'(\tau)$$

Por unicidad,$y_2(x) = \kappa y_1(x)$ en I.

c) Caso 3. Si $y_1(\tau) = y_1'(\tau) = 0$, entonces $y_1(x)$ es una solución de la ecuación diferencial que satisface las condiciones iniciales $y_1(\tau) = y_1'(\tau) = 0$; pero $y(x) = 0$ es la única solución a este problema con valores iniciales. Así, $y_1(x) \equiv 0$, que es un múltiplo constante de $y_2(x)$.

□

Ahora se demostrara el teorema

Demostración. Ya sabemos que $y(x) = c_1 y(x) + c_2 y_2(x)$ es una soución de (1), así que debemos mostrar que podemos elegir c_1 y c_2 de modo que

$$y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = Y_0$$

y

$$y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = Y_1$$

Pero un sencillo procedimiento algebraico muestra que estas ecuaciones tienen la solución

$$c_1 = \frac{Y_0 y_2'(x_0) - Y_1 y_2(x_0)}{y_1(x_0) y_2'(x_0) - y_1'(x_0) y_2(x_0)}, \quad c_2 = \frac{Y_1 y_1(x_0) - Y_0 y_1'(x_0)}{y_1(x_0) y_2'(x_0) - y_1'(x_0) y_2(x_0)}$$

siempre que el denominador no se anule; el lema nos garantiza que se cumple esta condición. □

Ahora podemos decir que si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de 1 en $(-\infty, \infty)$ entonces

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

es una solución general, ya que cualquier solución $y_g(x)$ de (1) se puede expresar de esta forma: basta elegir c_1 y c_2 de modo que $c_1 y_1 + c_2 y_2$ concuerden con el valor de y_g y de su derivada en un punto cualquiera. Por unicidad, $c_1 y_1 + c_2 y_2$ y y_g deben ser la misma función.