Método de variación de Parámetros.

Recuérdese que el método de variación de parámetros puede aplicarse a una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables y no está restringido a términos no homogéneos que involucren solamente polinomios, exponenciales y funciones senoidales. El método de variación de parámetros para sistemas cuenta con la misma flexibilidad y tiene una formulación matricial concisa que es conveniente tanto para propósitos prácticos como teóricos.
Se desea encontrar una solución particular x_p del sistema lineal no homogéneo

$$x' = P(t)x + f(t) \tag{1}$$

dado que ya se ha encontrado una solución general

$$x_c(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) \tag{2}$$

del sistema homogéneo asociado

$$x' = P(t)x \tag{3}$$

Se utiliza primero la matriz fundamental $\Phi(t)$ con vectores columna $x_1, x_2, ..., x_n$ para reescribir la función complementaria en (2), como

$$x_c(t) = \Phi(t)c \tag{4}$$

donde c representa el vector columna cuyas entradas son los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$. La idea es reemplazar el vector parámetro c con el vector variable $u(t)$. De este modo, se busca una solución particular de la forma

$$x_p(t) = \Phi(t)u(t) \tag{5}$$

Se debe determinar $u(t)$ de tal manera que x_p en realidad satisfaga la ecuación (1). La derivada de $x_p(t)$ es (por la regla del producto)

$$x_p'(t) = \Phi'(t)u(t) + \Phi(t)u'(t) \tag{6}$$

En consecuencia, la sustitución de las ecuaciones (5) y (6) en (1) obtiene

$$\Phi'(t)u(t) + \Phi(t)u'(t) = P(t)\Phi(t)u(t) + f(t) \tag{7}$$

Pero

$$\Phi'(t) = P(t)\Phi(t) \tag{8}$$

debido a que cada vector columna de $\Phi(t)$ satisface la ecuación (3). Entonces, la ecuación (7) se reduce a

$$\Phi(t)u'(t) = f(t) \tag{9}$$

Así, es suficiente con seleccionar $u(t)$ de tal manera que

$$u'(t) = \Phi(t)^{-1}f(t) \tag{10}$$

esto es

$$u(t) = \int \Phi(t)^{-1}f(t)\; dt \tag{11}$$

Después de sustituir (11) en (5) finalmente se obtiene la solución particular deseada, como se establece en el teorema siguiente.

Teorema 1. *Variación de parámetros.*
Si $\Phi(t)$ es la matriz fundamental del sistema homogéneo $x' = P(t)x$ en algún intervalo donde $P(t)$ y $f(t)$ son continuas, entonces la solución particular del sistema no homogéneo

$$x' = P(t)x + f(t)$$

está dada por

$$x_p(t) = \Phi(t)\int \Phi(t)^{-1}f(t)\ dt \tag{12}$$

Ésta es la fórmula de variación de parámetros para sistemas lineales de primer orden. Si se agrega esta solución particular, además de la función complementaria en (4), se obtiene la solución general

$$x(t) = \Phi(t)c + \Phi(t)\int \Phi(t)^{-1}f(t)\ dt \tag{13}$$

del sistema no homogéneo en (1).
La elección de la constante de integración en la ecuación (12) es irrelevante, porque sólo se necesita una solución particular. Para resolver los problemas de valores iniciales es conveniente seleccionar la constante de integración, de modo que $x_p(a) = 0$, y así integrar de a a t:

$$x_p(t) = \Phi(t)\int_a^t \Phi(s)^{-1}f(s)\ ds \tag{14}$$

Si se agrega la solución particular del problema no homogéneo

$$x' = P(t)x + f(t), \quad x(a) = 0$$

en (14) a la solución $x_c(t) = \Phi(t)\Phi(a)^{-1}x_a$ del problema homogéneo asociado $x' = P(t)x$, $x(a) = x_a$ se obtiene la solución

$$x(t) = \Phi(t)\Phi(a)^{-1}x_a + \Phi(t)\int_a^t \Phi(s)^{-1}f(s)\ ds \tag{15}$$

del problema de valor inicial no homogéneo

$$x' = P(t)x + f(t), \quad x(a) = x_a \tag{16}$$

Las ecuaciones (12) y (15) se cumplen para cualquier matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema homogéneo $x' = P(t)x$. En el caso de coeficientes constantes $P(t) \equiv A$ se puede utilizar la matriz exponencial $\Phi(t)$ para e^{At} esto es, la matriz fundamental particular tal que $\Phi(0) = I$. Entonces, debido a que $(e^{At})^{-1} = e^{At}$, la sustitución de $\Phi(t) = e^{At}$ en (12) obtiene la solución particular

$$x_p(t) = e^{At}\int e^{-At}f(t)\ dt \tag{17}$$

del sistema no homogéneo $x' = P(t)x + f(t)$. De manera similar, la sustitución de $\Phi(t) = e^{At}$ en la ecuación (15) con $a = 0$, obtiene la solución

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-At}f(t)\ dt \tag{18}$$

del problema de valores iniciales

$$x' = P(t)x + f(t), \quad x(0) = x_0 \tag{19}$$

Observación. Si se mantiene a t como la variable independiente, pero se emplea s para la variable de integración, entonces las soluciones en (17) y (18) se pueden volver a escribir en las formas

$$x_p(t) = \int e^{-A(s-t)} f(s)\, ds \quad y \quad x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{-A(s-t)} f(s)\, ds$$

Ejemplo Resuélvase el problema de valores iniciales

$$x' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix} te^{-2t}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{20}$$

La solución del sistema homogéneo asociado se muestra en la ecuación.

$$x_c(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}$$

Ésta proporciona la matriz fundamental

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}, \quad con \ \ \Phi(0) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Se concluye, que la matriz exponencial para la matriz de coeficientes A en (20) es

$$\begin{aligned} e^{At} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces la fórmula de variación de parámetros en la ecuación (18) resulta en

$$\begin{aligned} e^{-At}x(t) &= x_0 + \int_0^t e^{-As} f(s)\, ds \\ &= \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} + \int_0^t \frac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -15se^{-2s} \\ -4se^{-2s} \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -s - 14se^{-7s} \\ 3s - 7se^{-7s} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{14}\begin{bmatrix} -4 - 7t^2 + 4e^{-7t} + 28te^{-7t} \\ -2 + 21t^2 + 2e^{-7t} + 14te^{-7t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$e^{-At}x(t) = \frac{1}{14}\left[94 - 7t^2 + 4e^{-7t} + 28te^{-7t} 40 + 21t^2 + 2e^{-7t} + 14te^{-7t} \right]$$

Aquí, con la multiplicación del lado derecho por e^{At}, se encuentra que la solución del problema de valores iniciales en (20) está dado por

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{-2t}+6e^{5t} & -2e^{-2t}+2e^{5t} \\ -3e^{-2t}+3e^{5t} & 6e^{-2t}+e^{5t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{14}\begin{bmatrix} -94-7t^2+4e^{-7t}+28te^{-7t} \\ 40+21t^2+2e^{-7t}+14te^{-7t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{14}\begin{bmatrix} (6+28t-7t^2)e^{-2t}+92e^{5t} \\ (-4+14t+21t^2)e^{-2t}+46e^{5t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$