Ecuación de Bessel

Dada la ecuación diferencial

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \tag{1}$$

Si $A(x) \neq 0$ entonces (1) se escribe en forma estándar

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2}$$

Donde $P(x) = \dfrac{B(x)}{A(x)}$ y $P(x) = \dfrac{C(x)}{A(x)}$.
En (2) si $P(x) = \dfrac{p(x)}{x}$ y $Q(x) = \dfrac{q(x)}{x^2}$ entonces podemos escribir (2)

$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0 \tag{3}$$

Ejemplo Al considerar la ecuación diferencial

$$x^2(1+x)y'' + x(4-x^2)y' + (2+3x)y = 0$$

ésta se puede escribir

$$y'' + \frac{1}{x}\left(\frac{4-x^2}{1+x}\right) + \frac{1}{x^2}\left(\frac{2+3x}{1+x}\right)$$

y tenemos entonces que

$$p(x) = \frac{4-x^2}{1+x} \qquad y \qquad q(x) = \frac{2+3x}{1+x}$$

ambos coeficientes tienden a ∞ conforme $x \to 0$, donde se observa que $x = 0$ es un punto singular. Debido a que el cociente de los polinomios es analítico en cualquier punto siempre que el denominador sea diferente de cero, se observa que p(x) y q(x) son ambas analíticas en $x = 0$. En consecuencia, $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial dada.

En (3) si $x = 0$ es un punto singular regular entonces $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas en $x = 0$ de modo que

$$p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \cdots$$

$$q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + \cdots$$

de este modo escribimos (3) de la siguiente manera

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0 \tag{4}$$

y proponemos la solución para aplicar el método de Frobenuis

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

sustituimos en (4) y obtenemos

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2} + x[p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots]\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1} + [q_0+q_1x+q_1x^2+\cdots]\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r} = 0$$

trabajando el lado izquierdo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r}+[xp_0+p_1x^2+p_2x^3+\cdots]\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}+[q_0+q_1x+\cdots]\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

extendiendo

$$[r(r-1)c_0x^r+(r+1)rc_1x^{r+1}+\cdots]+[xp_0+p_1x^2+\cdots]\cdot[rc_0x^{r-1}+(r+1)c_1xr+\cdots]+[q_0+q_1x+\cdots]\cdot[c_0x^r+c_1x^{r+1}+\cdots]=0$$

Después de la multiplicación de los términos iniciales de los dos productos en el lado izquierdo, y agrupando coeficientes de x^r, se observa que el término de menor grado en la ecuación es $c_0[r(r-1)+p_0r+q_0]x^r$. Si la ecuación debe satisfacerse idénticamente, entonces los coeficientes de este término (así como los coeficientes de grados mayores) deben anularse. Pero considerando que $c_0\neq 0$, se concluye que r debe satisfacer la ecuación cuadrática

$$r(r-1)+p_0r+q_0$$

se llama **ecuación de índices** de la ecuación diferencial en (4), y sus dos raíces (posiblemente iguales) son los exponentes de la ecuación diferencial (en el punto singular regular $x=0$). La forma más simple de encontrar p_0 y q_0 es escribir la ecuación en la forma

$$y''+\frac{p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots}{x}y'+\frac{q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots}{x^2}y=0$$

Ejemplo Encuéntrense los exponentes de las soluciones posibles en series de Frobenius de la ecuación

$$2x^2(1+x)y''+3x(1+x)y'-(1-x^2)y=0 \tag{5}$$

Al dividir cada término entre $2x^2(1+x)$, puede reescribirse la ecuación diferencial en la forma

$$y''+\frac{\frac{3}{2}(1+2x+x^2)}{x}y'+\frac{-\frac{1}{2}(1-x)}{x^2}y=0$$

y de este modo se observa que $p_0=\dfrac{3}{2}$ y $q_0=-\dfrac{1}{2}$. Así, la ecuación de índices es

$$r(r-1)+\frac{3}{2}r-\frac{1}{2}=r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=(r+1)\left(r-\frac{1}{2}\right)=0$$

con raíces $r_1=\dfrac{1}{2}$ y $r_2=-1$. Las dos soluciones posibles en series de Frobenius son de las formas

$$y_1(x)=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \quad y \quad y_2(x)=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

en la ecuación (5), es más eficiente iniciar sustituyendo $y=x^r\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$. Se obtendrá entonces una fórmula de recurrencia que depende de r. Con el valor $r_1=\dfrac{1}{2}$ se obtiene una fórmula de recurrencia para la serie de y_1, mientras que con $r_2=-1$ se logra una fórmula de recurrencia para la serie de

y_2.
Al sustituir

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r},\quad y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1},\quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}$$

en la ecuación (5) se obtiene

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r+2}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

expandiendo

$$\begin{aligned}2r(r-1)c_0+2(1+r)rc_1x+2\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r}\\ +3rc_0+3(1+r)c_1x+3\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r}\\ -\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^{n+r}\\ -c_0-c_1x-\sum_{n=2}^{\infty}c_nx^{n+r}=0\end{aligned}$$

reagrupando

$$[2r(r-1)+3r-1]c_0+[2(r+1)r+3(r+1)-1]c_1x+\sum_{n=2}^{\infty}([2(n+r)(n+r-1)+3(n+r)-1]c_n-c_{n-2})x^{n+r}=0$$

tenemos que

$$[2r(r-1)+3r-1]c_0=0\ \Rightarrow\ 2\left(r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}\right)c_0=0$$

$$r=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ 2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)c_0=0\ \Rightarrow\ 2(0)c_0=0$$

$$r=-1\ \Rightarrow\ 2\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)c_0=0\ \Rightarrow\ 2(0)c_0=0$$

se concluya que $c_0\neq 0$.
Para c_1 tenemos

$$[2(r+1)r+3(r+1)-1]c_1=0\ \Rightarrow\ (2r^2+5r+2)c_1=0$$

Debido a que el coeficiente $2r^2+5r+2$ de c_1 es diferente de cero si $r=\frac{1}{2}$ ó $r=-1$ se concluye que $c_1=0$ en cualquier caso.
Por otro lado el coeficiente de x^{n+r} es

$$[2(n+r)(n+r-1)+3(n+r)-1]c_n-c_{n-2}=0\ \Rightarrow\ c_n=\frac{c_{n-2}}{2(n+r)^2+(n+r)-1},\quad n\geq 2$$

1. Si $r = \frac{1}{2}$. Se obtiene la fórmula de recurrencia

$$c_n = \frac{c_{n-2}}{2n^2 + 3n}, \quad n \geq 2$$

Con $n = 2, 4$ y 6 en la ecuación se obtiene

$$c_2 = \frac{c_0}{14}, \quad c_4 = \frac{c_2}{44} = \frac{c_0}{616}, \quad c_6 = \frac{c_4}{90} = \frac{c_0}{55440}$$

Así, la primera solución de Frobenius es

$$y_1(x) = c_0 x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x^2}{14} + \frac{x^4}{616} + \frac{x^6}{55440} + \cdots\right)$$

2. $r = -1$. Se obtiene la fórmula de recurrencia

$$c_n = \frac{c_{n-2}}{2n^2 - 3n}, \quad n \geq 2$$

Con $n = 2, 4$ y 6 en la ecuación se obtiene

$$c_2 = \frac{c_0}{2}, \quad c_4 = \frac{c_2}{20} = \frac{c_0}{40}, \quad c_6 = \frac{c_4}{54} = \frac{c_0}{2160}$$

Por lo que la segunda solución de Frobenius es

$$y_2 = c_0 x^{-1} \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{40} + \frac{x^6}{2160} + \cdots\right)$$

Ejemplo Encuéntrese una solución de Frobenius de la ecuación de **Bessel**,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$$

Solución En este caso la ecuación la escribimos en forma

$$y'' + \frac{x}{x^2} y' + \frac{x^2 - m^2}{x^2} y = 0$$

Por tanto, $x = 0$ es un punto singular regular con $p(x) = x$ y $q(x) = x^2 - m^2$, de tal manera que las series serán convergentes para toda $x > 0$. Debido a que $p_0 = 1$ y $q_0 = -m^2$, la **ecuación de índices** es

$$r(r-1) + r - m^2 = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - m^2 = 0 \;\Rightarrow\; r = \pm m$$

De este modo, se obtienen los exponentes $r = \pm m$ y por tanto la solución en términos de la serie de Frobenius

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m}$$

Al sustituir en

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$$

tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)c_nx^{n+m}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)c_nx^{n+m}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+m+2}-m^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+m}=0$$

Agrupando se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+m)(n+m-1)+(n+m)-m^2]c_nx^{n+m}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+m+2}=0$$

simplificando el primer sumando

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+m)^2-m^2]c_nx^{n+m}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+m+2}=0$$

recorriendo los índices del segundo sumando

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+m)^2-m^2]c_nx^{n+m}+\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^{n+m}=0$$

extraemos los primeros sumandos del primer sumando

$$0c_0x^m+[(1+m)^2-m^2]c_1x^{1+m}+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+m)^2-m^2]c_nx^{n+m}+\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^{n+m}=0$$

El término correspondiente a x^m resulta en que $0=0$; es decir, no proporciona información, en ese caso se toma $c_0\neq 0$. El término correspondiente a x^{m+1} resulta en que $c_1=0$, y el término para x^{n+m} obtiene la fórmula de recurrencia

$$cn=-\frac{c_{n-2}}{(n+m)^2-n^2}=-\frac{c_{n-2}}{n^2+2mn}$$

Debido a que $c_1=0$, se observa que $c_n=0$ siempre que n sea impar. Sustituyendo $n=2,4$ y 6 en la fórmula de recurrencia, se obtiene

$$c_2=-\frac{c_0}{4+4m}=-\frac{c_0}{2^2(m+1)}$$

$$c_4=-\frac{c_2}{16+8m}=\left(\frac{1}{8(m+2)}\right)\left(-\frac{c_0}{2^2(m+1)}\right)=\frac{c_0}{2^5(m+1)(m+2)}$$

$$c_6=-\frac{c_4}{36+12m}=-\left(\frac{1}{12(m+3)}\right)\left(-\frac{c_0}{2^5(m+1)(m+2)}\right)=\frac{c_0}{12\cdot 2^5(m+1)(m+2)(m+3)}$$

tenemos entonces la solución correspondiente al valor $r=m$

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+m}=c_0x^m\left(1-\frac{x^2}{2^2(m+1)}+\frac{x^4}{2^5(m+1)(m+2)}-\cdots\right)$$

Ejemplo Encuéntrese una solución de Frobenius de la ecuación de **Bessel de orden cero**,

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

Solución En este caso la ecuación la escribimos en forma

$$y'' + \frac{x}{x^2}y' + \frac{x^2}{x^2}y = 0$$

Por tanto, $x = 0$ es un punto singular regular con $p(x) = x$ y $q(x) = x^2$, de tal manera que las series serán convergentes para toda $x > 0$. Debido a que $p_0 = 1$ y $q_0 = 0$, la **ecuación de índices** es

$$r(r-1) + r = 0 \Rightarrow r^2 = 0 \Rightarrow r = 0$$

De este modo, se obtiene sólo un exponente $r = 0$ y por tanto existe solamente una solución en términos de la serie de Frobenius

$$y(x) = x^0\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Al sustituir en

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0$$

Combinando las dos primeras sumas y corriendo el índice de la tercera en -2 se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2c_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n = 0$$

de la primera al tomar los primeros dos términos

$$0 \cdot c_0x^0 + 1 \cdot c_1x + \sum_{n=2}^{\infty} n^2c_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n = 0$$

El término correspondiente a x^0 resulta en que $0 = 0$; es decir, no proporciona información. El término correspondiente a x^1 resulta en que $c_1 = 0$, y el término para x^n obtiene la fórmula de recurrencia

$$cn = -\frac{c_{n-2}}{n^2}$$

Debido a que $c_1 = 0$, se observa que $c_n = 0$ siempre que n sea impar. Sustituyendo $n = 2, 4$ y 6 en la fórmula de recurrencia, se obtiene

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2}, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4^2} = \frac{c_0}{2^24^2}, \quad c_6 = -\frac{c_4}{6^2} = -\frac{c_0}{2^24^26^2}$$

Evidentemente, el patrón es

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^24^2\cdots(2n)^2} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n}(n!)^2}$$

La elección de $c_0 = 1$ proporciona una de las más importantes funciones especiales en matemáticas, la función de **Bessel de orden cero** de primera clase, que se representa por $J_0(x)$. De este modo,

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n}(n!)^2} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \cdots$$

Ejemplo Encuéntrese una solución de Frobenius de la ecuación de **Bessel de orden** $\frac{1}{2}$,

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$

Solución En este caso la ecuación la escribimos en forma

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y = 0$$

Por tanto, $x = 0$ es un punto singular regular con $p(x) = 1$ y $q(x) = x^2 - \dfrac{1}{4}$, de tal manera que las series serán convergentes para toda $x > 0$. Debido a que $p_0 = 1$ y $q_0 = -\dfrac{1}{4}$, la **ecuación de índices** es

$$r(r-1) + r - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow r^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow r = \pm\frac{1}{2}$$

De este modo, se obtienen exponentes $r = \pm\dfrac{1}{2}$ y por tanto las soluciónes en términos de la serie de Frobenius con $r = -\dfrac{1}{2}$ son:

$$c_0 \; arbitraria$$

$$m = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] c_1 = 0 \Rightarrow c_1 \; arbitraria$$

$$m = -\frac{1}{2} \Rightarrow c_n = -\frac{c_{n-2}}{n^2 - n} = -\frac{c_{n-2}}{n(n-1)}$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2!}$$

$$c_3 = -\frac{c_1}{3!}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{4 \cdot 3} = -\left(-\frac{c_0}{2!}\right)\left(\frac{1}{4 \cdot 3}\right) = \frac{c_0}{4!}$$

$$c_5 = -\frac{c_3}{5 \cdot 4} = -\left(-\frac{c_1}{3!}\right)\left(\frac{1}{5 \cdot 4}\right) = \frac{c_1}{5!}$$

asi sucesivamente se tiene

$$y(x) = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x^{-\frac{1}{2}} \left(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \cdots\right)$$

$$y(x) = c_0 x^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \right) + c_1 x^{-\frac{1}{2}} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \right)$$

$$\frac{c_0}{\sqrt{x}} \cos(x) + \frac{c_1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen}(x)$$