Ecuaciones no homogéneas: El método de coeficientes indeterminados

Deduciremos un procedimiento sencillo para determinar una solución de una ecuación lineal no homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = g(x) \tag{1}$$

Si $g(x)$ es de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Proponemos una solución

$$\psi(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n$$

tenemos entonces que

$$\psi'(x) = A_1 + 2A_2x + \cdots + nA_nx^{n-1}$$
$$\psi''(x) = 2A_2 + 6A_3x + \cdots + n(n-1)A_nx^{n-2}$$

de manera que

$$\begin{aligned} a\psi'' + b\psi' + c\psi &= a(2A_2 + 6A_3x + \cdots + n(n-1)A_nx^{n-2}) + b(A_1 + 2A_2x + \cdots + nA_nx^{n-1}) \\ &+ c(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n) \\ &= cA_nx^n + [cA_{n-1} + nbA_n]x^{n-1} + \cdots + cA_0 + bA_1 + 2A_2 \end{aligned}$$

igualando coeficientes

$$cA_n = a_n \;\Rightarrow\; A_n = \frac{a_n}{c}$$
$$cA_{n-1} + nbA_n = a_{n-1} \;\Leftarrow\; A_{n-1} = \frac{cA_{n-1} + nbA_n}{c}$$
$$\cdots$$
$$cA_0 + bA_1 + 2A_2 = a_0$$

Ejemplo Determinar una solución particular de

$$y'' + 3y' + 2y = 3x + 1$$

Solución En este caso $g(x) = 3x + 1$ es un polinomio de grado uno, asi que proponemos una ecuación lineal

$$\psi(x) = Ax + B$$

en este caso

$$\psi'(x) = A$$
$$\psi''(x) = 0$$

Por lo que

$$\psi'' + 3\psi' + 2\psi = 0 + 3(A) + 2(Ax + B)$$

por otro lado

$$\psi'' + 3\psi' + 2\psi = 3x + 1$$

igualando coeficientes $2A = 3 \;\Rightarrow\; A = \frac{3}{2}$ y $3A + 2B = 1 \;\Rightarrow\; B = -\frac{7}{4}$. Por lo que una solución particular es

$$\psi(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$$

Ejemplo Determinar una solución particular de

$$y'' + y' + y = x^2$$

Solución En este caso $g(x) = x^2$ es un polinomio de grado dos, asi que proponemos una ecuación

$$\psi(x) = A + Bx + Cx^2$$

en este caso

$$\psi'(x) = B + 2Cx$$
$$\psi''(x) = 2C$$

Por lo que

$$\psi'' + \psi' + \psi = 2C + +B + 2Cx + A + Bx + Cx^2 = (A + B + 2C) + (2C + B)x + Cx^2$$

por otro lado

$$\psi'' + \psi' + \psi = x^2$$

igualando coeficientes $C = 1$ y $2C + B = 0 \Rightarrow B = -2$ y $A + B + 2C = 0 \Rightarrow A = 0$. Por lo que una solución particular es

$$\psi(x) = -2x + x^2$$

Con el método de coeficientes indeterminados, podemos hallar una solución particular $\psi(x)$ de la ecuación no homogenea (1).
Ahora si consideramos la ecuación homogénea asociada a (1) y sus soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$. Entonces una solución de la ecuación no homogénea (1) es de la forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \psi(x), \qquad c_1, c_2 \textit{ constantes}$$

Para comprobar que lo anterior es cierto

a) Si ψ_1, ψ_2 son soluciones de la ecuación no homogénea, entonces $\psi_1 - \psi_2$ es solución de la ecuación homogénea.
En efecto pues

$$\begin{aligned} a(\psi_1 - \psi_2)'' + b(\psi_1 - \psi_2) + c(\psi_1 - \psi_2) &= \psi_1'' - \psi_2'' + b(\psi_1' - \psi_2') + c(\psi_1 - \psi_2) \\ &= a\psi_1'' + b\psi_1' + c\psi_1 - [a\psi_2'' + b\psi_2' + c\psi_2] \\ &= g(x) - g(x) = 0 \end{aligned}$$

Esto significa que la diferencia de dos soluciones de la ecuación no homogénea es solución de la ecuación homogénea.

b) Si y, ψ son soluciónes de la ecuación no homogénea entonces según lo anterior $y - \psi$ es solución de la ecuación homogénea.

c) Toda solución de la ecuación homogénea es de la forma

$$c_1 y_i + c_2 y_2$$

por todo lo anterior se tiene
$$y-\psi=c_1y_i+c_2y_2$$
esto implica que
$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\psi(x),\qquad c_1,c_2\ constantes$$
Si en (1) se tiene que
$$g(x)=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)e^{\alpha\ x}$$
Se sugiere una solución $\psi(x)=v(x)e^{\alpha\ x}$. En este caso
$$\psi'(x)=v'(x)e^{\alpha\ x}+\alpha v(x)e^{\alpha\ x}$$

$$\begin{aligned}\psi''(x)&=v''(x)e^{\alpha\ x}+\alpha e^{\alpha\ x}v'(x)+\alpha v'(x)e^{\alpha\ x}+\alpha^2v(x)e^{\alpha\ x}\\&=e^{\alpha\ x}(v''(x)+\alpha v'(x)+\alpha v'(x)+\alpha^2v(x))\\&=e^{\alpha\ x}(v''(x)+2\alpha v'(x)+\alpha^2v(x))\end{aligned}$$

Tenemos entonces
$$\begin{aligned}a\psi''+b\psi'+c\psi&=a(e^{\alpha\ x}(v''(x)+2\alpha v'(x)+\alpha^2v(x)))\\&+b(v'(x)e^{\alpha\ x}+\alpha v(x)e^{\alpha\ x})\\&+c(v(x)e^{\alpha\ x})\\&=e^{\alpha\ x}(av''(x)+2\alpha av'(x)+a\alpha^2v(x))\\&+e^{\alpha\ x}(bv'(x)+b\alpha v(x))\\&+e^{\alpha\ x}(cv(x))\\&=e^{\alpha\ x}(av''(x)+(2\alpha a+b)v'(x)+(a\alpha^2+b\alpha+c)v(x))\end{aligned}$$

Se tiene entonces
$$e^{\alpha\ x}(av''(x)+(2\alpha a+b)v'(x)+(a\alpha^2+b\alpha+c)v(x))=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)e^{\alpha\ x}$$

es decir
$$av''(x)+(2\alpha a+b)v'(x)+(a\alpha^2+b\alpha+c)v(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \tag{2}$$
Al buscar una solución particular de (2) se tienen los siguientes casos

a) $a\alpha^2+b\alpha+c\neq 0$. Esto significa que α no es solución de la ecuación característica ar^2+br+c, en otras palabras $e^{\alpha x}$ no es solución de la ecuación homogenea $ay''+by'+c=0$

b) $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ pero $2\alpha+b\neq 0$. Esto significa que α es raíz simple de la ecuación característica ar^2+br+c, en otras palabras $e^{\alpha x}$ es solución de la ecuación homogenea $ay''+by'+c=0$, pero $xe^{\alpha x}$ no lo es.

c) $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ pero $2\alpha+b=0$. Esto significa que α es raíz doble de la ecuación característica ar^2+br+c, de modo que, tanto $e^{\alpha x}$ como $xe^{\alpha x}$ son soluciónes de la ecuación homogenea $ay''+by'+c=0$

Por lo tanto la ecuación (1) con $g(x)=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)e^{\alpha\ x}$ tiene una solución particular $\psi(x)$ de la forma

a) $\psi(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)e^{\alpha\ x}$ si $e^{\alpha\ x}$ no es solución de la ecuación homogenea

b) $\psi(x) = x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)e^{\alpha\ x}$ si $e^{\alpha\ x}$ es solución de la ecuación homogenea pero $xe^{\alpha\ x}$ no lo es.

c) $\psi(x) = x^2(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)e^{\alpha\ x}$ si $e^{\alpha\ x}$ y $xe^{\alpha\ x}$ son solución de la ecuación homogenea

Ejemplo Encontrar una solución general de la ecuación

$$y'' - 4y' + 4y = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{27})e^{2x}$$

Solución En este caso la ecuación homogénea es

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

y la ecuación característica

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

que tiene raíz doble $r_1 = r_2 = 2$. Por tanto tiene soluciones e^{2x} y xe^{2x} de la ecuación homogénea. Para hallar la solución de la no homogénea proponemos $\psi(x) = v(x)e^{2x}$, entonces

$$\psi'(x) = v(x)2e^{2x} + e^{2x}v'(x)$$

$$\psi''(x) = v(x)4e^{2x} + 2e^{2x}v'(x) + e^{2x}v''(x) + v'(x)2e^{2x} = e^{2x}[v''(x) + 4v'(x) + 4v(x)]$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\psi''(x) - 4\psi'(x) + 4\psi(x) &= e^{2x}[v''(x) + 4v'(x) + 4v(x)] - 4[2v(x)e^{2x} + v'(x)e^{2x}] + 4[v(x)e^{2x}] \\ &= e^{2x}v''(x) + 4e^{2x}v'(x) + 4e^{2x}v(x) - 8e^{2x}v(x) - 4v'(x)e^{2x} + 4e^{2x}v(x) \\ &= e^{2x}v''(x)\end{aligned}$$

Por lo que

$$e^{2x}v''(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{27})e^{2x} \ \Rightarrow\ v''(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{27}$$

integrando se tiene

$$v'(x) = x + \cdots + \frac{x^{28}}{28}$$

integrando nuevamente

$$v(x) = \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{29}}{29 \cdot 28}$$

y por lo tanto la solución es

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + e^{2x}\left[\frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{29}}{29 \cdot 28}\right]$$