Convergencia de los iterados de Picard

Las soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales pueden no existir para todo valor del tiempo t.

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\, ds$$

Por lo tanto, no es posible esperar la convergencia de las iteraciones de Picard $y_n(x)$. Para darse una idea de dónde convergen las iteraciones de Picard, puede tratarse de encontrar un intervalo en el cual las iteraciones $y_n(x)$ están uniformemente acotadas (es decir, $|y_n(x)| \leq K$ para alguna constante K). De manera equivalente puede buscarse un rectángulo R que contenga las gráficas de todas las iteraciones de Picard $y_n(x)$.

Lema 1. *Elíjanse dos números positivos cualesquiera a y b y considérese el rectángulo*

$$R = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x_0 \leq x \leq x_0 + a,\ |y - y_0| \leq\ b\}$$

Calcúlese

$$M = \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)|$$

y hágase

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

Entonces

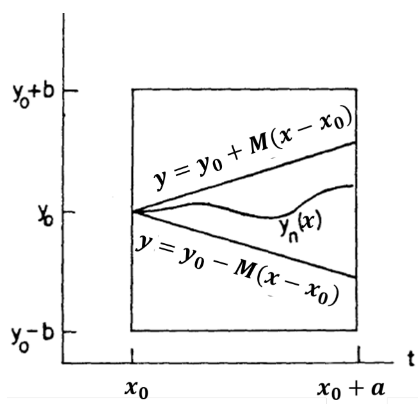
$$|y_n(x) - y_0| \leq M(x - x_0)$$

para $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$

El Lema afirma que la gráfica de $y_n(x)$ está contenida entre las rectas

$$y = y_0 + M(t - t_0), \quad y = y_0 - M(t - t0)$$

para $0 < x < x_0 + a$. Estas rectas salen del rectángulo R para $x = x_0 + a$ si $a < \dfrac{b}{M}$ y para $x = x_0 + \dfrac{b}{M}$ si $\dfrac{b}{M} < a$. En estos casos, por lo tanto, la gráfica de $y_n(x)$ está contenida en R para $x_0 < x < x_0 + a$.



Demostración. Se hara por inducción.
Para $n = 0$ se cumple, ya que $y_0(x) = y_0$.
Ahora queremos ver que se cumple para $n = j + 1$ si se cumple para $n = j$. Para esto tenemos que si

$$|y_j(x) - y_0| \leq M(x - x_0)$$

entonces

$$\begin{aligned} |y_{j+1}(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_j(s))\ ds \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y_j(s))|\ ds \\ &\leq M(x - x_0) \end{aligned}$$

para $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$. Por lo tanto, por inducción, se cumple para todo n. □

Ahora es posible demostrar que las iteraciones de Picard $y_n(x)$ convergen para toda x en el intervalo $x_0 < x < x_0 + a$ si $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe y es continua. El primer paso consiste en transformar el problema de indicar que la sucesión de funciones $y_n(x)$ converge a un problema más sencillo que consiste en probar que converge una cierta serie infinita. Esto se logra escribiendo $y_n(x)$ de la siguiente manera

$$y_n(x) = y_0(x) + [y_1(x) - y_0(x)] + [y_2(x) - y_1(x) + [y_3(x) - y_2(x)] + \cdots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)]$$

Claramente la sucesión $y_n(x)$ converge si y sólo si la siguiente serie converge

$$[y_1 - y_0] + [y_2(x) - y_1(x)] + \cdots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \cdots$$

Para probar que la serie infinita converge basta con demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| < \infty$$

Esto se logra de la siguiente manera. Obsérvese que

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} [f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))]\ ds \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))|\ ds \\ &= \int_{x_0}^{x} \left| \frac{\partial f(s, \xi(s))}{\partial y} \right|\ |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)|\ ds \end{aligned}$$

donde $\xi(s)$ se encuentra entre $y_{n-1}(s)$ y $y_{n-2}(s)$.
Del Lema se deduce inmediatamente que todos los puntos $(s, \xi(s))$ se encuentran en el rectángulo R para $s < x_0 + a$. Por lo tanto,

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq L \int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(x)|\ ds, \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$$

donde

$$L = \max_{(x,y)\in R} \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right|$$

La ecuación anterior define L. Tomando $n = 2$ se obtiene

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &\leq L \int_{x_0}^{x} |y_1(x) - y_0| \, ds \\ &\leq L \int_{x_0}^{x} M(s - x_0) \, ds \\ &= \frac{LM(x - x_0)^2}{2} \end{aligned}$$

Esto a su vez implica que

$$\begin{aligned} |y_3(x) - y_2(x)| &\leq L \int_{x_0}^{x} |y_2(s) - y_1(s)| \, ds \\ &\leq ML^2 \int_{x_0}^{x} \frac{(s - x_0)^2}{2} \, ds \\ &= \frac{ML^2(x - x_0)^3}{3!} \end{aligned}$$

Procediendo de manera inductiva se ve que

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{ML^{n-1}(x - x_0)^n}{n!}, \quad para \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$$

Por lo tanto para $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$ se tiene

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0(x)| + |y_2(x) - y_1(x)| + \cdots &\leq M(x - x_0) + \frac{ML(x - x_0)^2}{2!} + \frac{ML^2(x - x_0)^3}{3!} + \cdots \\ &\leq M\alpha + \frac{ML\alpha^2}{2!} + \frac{ML^2\alpha^3}{3!} + \cdots \\ &= \frac{M}{L} \left[\alpha L + \frac{(\alpha\ L)^2}{2!} + \frac{(\alpha\ L)^3}{3!} + \cdots \right] \\ &= \frac{M}{L} \left(e^{\alpha\ L} - 1 \right) \end{aligned}$$

Esta cantidad es obviamente menor que infinito. Por lo tanto, las iteraciones de Picard $y_n(x)$ convergen para x en el intervalo $x_0 < x < x_0 + a$. (Un argumento similar muestra que $y_n(x)$ converge para toda x en el intervalo $x_0 - \beta < x < x_0$, donde $B = \min\left(a, \dfrac{b}{N}\right)$ y N es el valor máximo de $|f(t, y)|$ para (t, y) en el rectángulo $x_0 - a \leq x \leq x_0$, $|y - y_0 \leq b|$). Se denotará con y(t) al límite de $y_n(x)$..
Ahora vamos a comprobar que la aproximación de Picard

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(x)) \, ds$$

se aproximan a

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\ ds$$

Para esto se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\ ds - \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s)) \right| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y(s)) - f(s, y_n(s)|\ ds \\ &\leq L \int_{x_0}^{x} |y(s) - y_n(s)|\ ds \end{aligned}$$

Observamos que

$$y(s) - y_n(s) = \sum_{j=n+1}^{\infty} [y_j(s) - y_{j-1}(s)]$$

pues

$$y(s) = y_0 + \sum_{j=1}^{\infty} [y_j(s) - y_{j-1}(s)]$$

y

$$y_n(s) = y_0 + \sum_{j=1}^{\infty} [y_j(s) - y_{j-1}(s)]$$

Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} |y(s) - y_n(s)| &\leq M \sum_{j=n+1}^{\infty} L^{j-1} \frac{(s - x_0)^j}{j!} \\ &\leq M \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{L^{j-1} \alpha^j}{j!} \\ &= \frac{M}{L} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(\alpha\ L)^j}{j!} \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\ ds - \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\ ds \right| &\leq M \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(\alpha\ L)^j}{j!} \int_{x_0}^{x} ds \\ &\leq\ M\ \alpha \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(\alpha\ L)^j}{j!} \end{aligned}$$

Esta sumatoria tiende a cero cuando n tiende a infinito, ya que es el residuo del desarrollo de la serie de Taylor convergente de $e^{\alpha L}$. Por lo tanto,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\ ds = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\ ds$$

Ahora para poner de manifiesto que.$y(x)$ es continua hay que mostrar que para toda $\epsilon > 0$ puede encontrarse $\delta > 0$ tal que

$$|y(x+h) - y(x)| < \epsilon \quad si \quad |h| < \delta$$

Ahora bien, no es posible com parar $y(x+h)$ con y(x) directamente, ya que no se conoce y(x) de modo explícito. Para salvar esta dificultad se elige un entero N lo bastante grande y se observa que

$$y(x+h) - y(x) = [y(x+h) - y_N(x+h)] + [y_N(x+h) - y_N(x)] + [y_N(x) - y(x)]$$

Con más detalle se elige N suficientemente grande como para que

$$\frac{M}{L} < \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{(\alpha\ L)^j}{j!} < \frac{\epsilon}{3}$$

Entonces se sigue que

$$|y(x+h) - y_N(x+h)| < \frac{\epsilon}{3} \quad y \quad |y_N(x) - y(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

para $x < x_0 + \alpha$ y h suficientemente pequeña (tal que $x + h < x_0 + \alpha$). Luego obsérvese que $y_N(x)$ es continua, pues se obtiene después de N integraciones sucesivas de funciones continuas. Por lo tanto, puede elegirse $\delta > 0$ lo bastante pequeña de modo que

$$|y(x+h) - y(x)| \leq |y(x+h) - y_N(x+h)| + |y_N(x+h) - y_N(x)| + |y_N(x) - y(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

para $|h| < \delta$. Por lo tanto, y(x) es una solución continua de la ecuación integral.