Ecuaciones diferenciales de segundo orden

La ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes

$$ay'' + by' + cy = g(x), \qquad (a \neq 0)$$

con el caso particular en que la función $g(x) = 0$

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1}$$

Al observar la ecuación (1) vemos que sus soluciones deben tener la propiedad de que su segunda derivada pueda expresarse como combinación lineal de sus derivadas de orden uno y cero. Esto sugiere tratar de hallar una solución de la forma $y = e^{rt}$, ya que las derivadas de e^{rt} son precisamente constantes por e^{rt}. Si sustituimos y $y = e^{rt}$ en (1), obtenemos

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0$$

Como e^{rt} nunca es cero, podemos dividir entre esto para obtener

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2}$$

En consecuencia, $y = e^{rt}$ es una solución de (1) si y sólo si r satisface la ecuación (2). La ecuación (1) es la ecuación auxiliar (o ecuación característica) asociada a la ecuación homogénea (1).
La ecuación auxiliar es cuadrática y sus raíces son

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cuando el discriminante $b^2 - 4ac$ es positivo, las raíces r_1 y r_2 son reales y distintas. Si $b^2 - 4ac = 0$, las raíces son reales e iguales. Cuando $b^2 - 4ac < 0$, las raíces son números complejos conjugados.

Ejemplo Determinar un par de soluciones de

$$y'' + 5y' - 6y = 0$$

Solución La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 + 5r - 6 = (r - 1)(r + 6) = 0$$

que tiene las raíces $r_1 = 1$, $r_2 = -6$. Así, e^t y e^{-6t} son soluciones.
Observe que la función idénticamente nula,$y(x) = 0$, siempre es solución de (1). Además, cada vez que tengamos un par de soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de esta ecuación, como en el ejemplo 1, podemos construir una infinidad de soluciones mediante sus combinaciones lineales:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{3}$$

para cualquier elección de las constantes c_1 y c_2. El hecho de que (3) sea una solución de (1) se puede ver mediante una sustitución y un rearreglo:

$$\begin{aligned} ay''by' + cy &= a(c_1y_1(x) + c_2y_2(x))'' + b(c_1y_1(x) + c_2y_2(x))' + c(c_1y_1(x) + c_2y_2(x)) \\ &= a(c_1y_1'' + c_2y_2'') + b(c_1y_1' + c_2y_2') + c(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(ay_1''by_1' + cy_1) + c_2(ay_2''by_2' + cy_2) \\ &= 0 + 0 \end{aligned}$$

Los dos "grados de libertad" c_1 y c_2 en la combinación (3) sugieren que las soluciones de la ecuación diferencial (1) se pueden determinar con condiciones adicionales, como las condiciones iniciales para las ecuaciones de primer orden, pero la presencia de c_1 y c_2 lleva a suponer que se pueden imponer dos de tales condiciones en vez de una.

Ejemplo Resolver el problema con valores iniciales

$$y'' + 2y' - y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$$

Primero encontramos un par de soluciones como en el ejemplo anterior. Luego ajustamos las constantes c_1 y c_2 en ()3 para obtener una solución que cumpla las condiciones iniciales sobre $y(0)$ y $y'(0)$. La ecuación auxiliar es

$$4r_1 = -1 + \sqrt{2} \quad y \quad r_2 = -1 - \sqrt{2}$$

En consecuencia, la ecuación diferencial dada tiene soluciones de la forma

$$y(x) = c_1e^{(-1+\sqrt{2})x} + c_2e^{(-1-\sqrt{2})x}$$

Para determinar la solución específica que satisface las condiciones iniciales dadas, primero derivamos la y dada en y luego sustituimos y y y' en las condiciones iniciales, obteniendo

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1e^0 + c_2e^0 \\ y'(0) &= (-1 + \sqrt{2})c_1e^0 + (-1 - \sqrt{2})c_1e^0 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 \\ -1 &= (-1 + \sqrt{2})c_1 + (-1 - \sqrt{2})c_1 \end{aligned}$$

Al resolver este sistema se tiene $c_1 = \dfrac{-\sqrt{2}}{4}$ y $c_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.
Así

$$y(x) = \frac{-\sqrt{2}}{4}e^{(-1+\sqrt{2})x} + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{(-1-\sqrt{2})x}$$

es la solución deseada.

Teorema 1. *Para cualesquiera números reales a, b, c, x_0, y_0, y_1, existe una única solución del problema con valores iniciales*

$$ay'' + by' + cy = 0; \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \tag{4}$$

La solución es válida para todo x en $(-\infty, \infty)$.