Ecuaciones Exactas

La ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

también puede expresarse en la forma diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \tag{2}$$

Ejemplo La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y}{x - 1} \tag{3}$$

puede expresarse como

$$(y - 3x^2)dx + (x - 1)dy = 0 \tag{4}$$

donde $M(x, y) = y - 3x^2$ y $N(x, y) = x - 1$.

Hay otras maneras de expresar la ecuación 3 en forma diferencial, tal como

$$\left(\frac{y - 3x^2}{x - 1}\right) dx + dy = 0$$

Para resolver la ecuación 2, es util saber si el primer miembro es una diferencial total.
Una diferencial total $df(x, y)$ de una función $f(x, y)$ de dos variables se define mediante

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

donde dx y dy son incrementos arbitrarios.

Ejemplo Si $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$, entonces

$$df(x, y) = y\cos(xy)dx + x\cos(xy)dy$$

Definición 1. *Se dice que la forma diferencial*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \tag{5}$$

es exacta en un rectángulo R, si existe una función $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = N(x, y) \tag{6}$$

para todo (x, y) en R. Esto es, la diferencial total de $f(x, y)$ satisface

$$df(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

Si $df(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una forma diferencial exacta, entonces la ecuación

$$df(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

se llama ecuación exacta.

Ejemplo Demuestre que la ecuación

$$(y - 3x^2)dx + (x - 1)dy = 0 \tag{7}$$

es exacta

Solución Si los términos de 7 se reagrupan como sigue

$$(ydx + xdy) - 3x^2dx - dy = 0$$

entonces se observa que esta ecuación se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} d(xy) - d(x^3) - dy = 0 \\ d(xy - x^3 - y) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $f(x, y) = xy - x^3 - y$ satisface

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - 3x^2 = M(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - 1 = N(x, y)$$

y entonce 7 es exacta.

En el ejemplo precedente se observa una reagrupación de los términos que facilita el reconocimiento de una función $f(x, y)$ cuya diferencial total es $M(x, y)dx + N(x, y)dy$.
Desafortunadamente, para otras ecuaciones podría no ser tan sencillo determinar $f(x, y)$ mediante inspección.

Teorema 1. *Suponga que las primeras derivadas parciales de $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son continuas en un rectángulo R. Entonces*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es una ecuación exacta en R si y sólo si la condición de compatibilidad

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \tag{8}$$

se cumple para toda x, y en R.

Demostración. $\Rightarrow$
Supóngase que $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta, entonces existe una función $f(x, y)$ que satisface

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

tenemos entonces que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x, y)$$

y también
$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y)$$
Por hipótesis las primeras derivadas parciales M y N son continuas en R, por tanto
$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$
y entonces se satisface
$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$
$\Leftarrow$

Supongamos ahora que existe una función $f(x,y)$ que satisface
$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$
Y procederemos a encontrar dicha función $f(x,y)$. Tenemos que $f(x,y)$ debe satisfacer
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=M(x,y)$$
al integrar con respecto de x tenemos
$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y) \tag{9}$$
Observe que en vez de utilizar C para representar la constante de integración, hemos escrito g(y). Esto se debe a que y se mantiene fija al integrar con respecto de x, y por tanto nuestra constante podría depender de y. Para determinar g(y), derivamos ambos lados de 9 con respecto a y para obtener
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)+\frac{\partial}{\partial y}g(y) \tag{10}$$
Como g sólo es función de y, podemos escribir $\frac{\partial g}{\partial y}=g'(y)$ y despejar $g'(y)$ en 10 para obtener
$$g'(y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)$$
Como $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=N(x,y)$, esta última se convierte en
$$g'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) \tag{11}$$
Observe que aunque el lado derecho de 11 indica una posible dependencia de x, las apariciones de esta variable deben cancelarse, pues el lado derecho $g'(y)$ sólo depende de y. Para ver esto derivamos con

respecto a x el lado derecho para obtener

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right) &= \frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \\
&= \frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx \\
&= \frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y} \\
&= 0
\end{aligned}$$

por lo tanto, el miembro de la derecha sólo depende de y.
Al integrar 11 podemos determinar $g(y)$ salvo una constante numérica, y por tanto podemos determinar la función $f(x,y)$ salvo una constante numérica, a partir de las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$.
Siendo la función

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+\int\left(N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right)dy$$

□

La construcción en la demostración del teorema proporciona en realidad un procedimiento explícito para resolver ecuaciones exactas. Resumimos en el siguiente procedimiento

a) Si $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es exacta, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$$

Integre esta última ecuación con respecto de x para obtener

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$$

b) Para determinar $g(y)$, calcule la derivada parcial con respecto de y de ambos lados de la ecuación y sustituya N en vez de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Ahora podemos hallar $g'(y)$

c) Integra $g'(y)$ para obtener $g(y)$ salvo una constante numérica. Al sustituir $g(y)$ en la ecuación se obtiene $f(x,y)$.

d) La solución de $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ está dada de manera implícita por $f(x,y)=C$

Ejemplo Resolver según el procedimiento

$$(6xy-y^3)dx+(4y+3x^2-3xy^2)dy=0$$

En este caso tenemos que

$$M(x,y)=6xy-y^3 \;\Rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(6xy-y^3)=6x-3y^2$$

$$N(x,y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(4y + 3x^2 - 3xy^2) = 6x - 3y^2$$

por lo tanto

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

y la ecuación es exacta.
Según el procedimeinto

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) = \int (6xy - y^3)dx + g(y) = 3x^2y - xy^3 + g(y)$$

y hacemos

$$N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y - xy^3 + g(y)\right) = 3x^2 - 3xy^2 + g'(y)$$

Como $N(x,y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2$ entonces

$$N(x,y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2 = 3x^2 - 3xy^2 + g'(y)$$

por lo que

$$g'(y) = 4y$$

integrando

$$g(y) = 2y^2 + C$$

así la función nos queda

$$f(x,y) = 3x^2y - xy^3 + 2y^2 + C$$

en forma implícita se escribe

$$3x^2y - xy^3 + 2y^2 = C$$