Ecuaciones diferenciales homogéneas

Definición 1. *Polinomios homogéneos son aquellos en los que todos los términos son del mismo grado.*

Ejemplo Tenemos que

$$x^2y + 8xy^2 - x^3 + y^3$$

La suma de los exponentes del primer ´término es $2 + 1 = 3$, lo mismo para el segundo $1 + 2 = 3$; por lo tanto, los cuatro términos son de grado 3.

Ejemplo Tenemos que

$$xyz^2 - x^2y^2$$

Es un polinomio homogéneo de grado 4.

Definición 2. *La ecuación diferencial homogénea es de la forma:*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

donde M y N tiene la propiedad de que para toda $t > 0$, la sustitución de x por tx y la de y por ty hace que M y N sean del mismo grado n.

$$M(tx, ty) = t^n M(x, y)$$
$$N(tx, ty) = t^n N(x, y)$$

Ejemplo Determinar si la función

$$f(x, y) = 2\sqrt{xy} + x$$

es homogénea; si lo es, indicar su grado:

Solución En este caso

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= 2\sqrt{(tx)(ty)} + tx \\ &= 2t\sqrt{xy} + tx \\ &= t[2\sqrt{xy} + x] \end{aligned}$$

como $f(tx, ty) = t^1 f(x, y)$, la función es homogénea de grado 1

Ejemplo Determinar si la función

$$f(x, y) = \sqrt{x + y}$$

es homogénea; si lo es, indicar su grado:

Solución En este caso

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= \sqrt{tx + ty} \\ &= \sqrt{t(x + y)} \\ &= t^{\frac{1}{2}}\sqrt{x + y} \end{aligned}$$

como $f(tx, ty) = t^{\frac{1}{2}} f(x, y)$, la función es homogénea de grado $\dfrac{1}{2}$

Este tipo de ecuaciones puede reducirse a ecuaciones de variables separables mediante sustituciones apropiadas.

Definición 3. *Las ecuaciones diferenciales homogéneas también tienen la forma:*

$$\frac{dy}{dx} + g(u) = 0 \quad donde \quad u = f(x, y)$$

Usando sustituciones algebraicas apropiadas, las ecuaciones diferenciales homogéneas se convierten en ecuaciones de variables separables. Una de las sustituciones más comunes es:

$$\frac{y}{x} = v \;\rightarrow\; y = vx$$

Ejemplo Resolver la ecuación diferencial

$$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$$

usando $y = vx$ y $dy = vdx + xdv$ se tiene

$$(x^2 + v^2x^2)dx = vx^2(vdx + xdv)$$

Dividiendo entre x^2

$$(1 + v^2)dx = v(vdx + xdv)$$

Separando variables

$$(1 + v^2 - v^2)dx = vxdv$$

$$\frac{dx}{x} = vdv$$

Integrando

$$\ln|x| = \frac{v^2}{2} + C$$

Como $v = \dfrac{y}{x} \;\rightarrow\; \ln|x| = \dfrac{1}{2}\dfrac{y^2}{x^2} + C$

Entonces

$$\ln|x| = \frac{y^2}{2x^2} + C \;\Rightarrow\; 2x^2(\ln|x| - C) = y^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{2x^2(\ln|x| - C)} = y$$

Ejemplo Resolver

$$(x + y)dx + (x + y - 4)dy = 0 \quad y(-1) = 0$$

Usando $v = x + y \;\rightarrow\; y = v - x$ y $dy = dv - dx$ se tiene

$$vdx + (v - 4)(dv - dx) = 0$$

$$vdx + (v - 4)dv - (v - 4)dx = 0$$

Separando variables

$$(v - 4)dv = -4dx$$

Integrando

$$\frac{v^2}{2} - 4v = -8x + C$$

$$v^2 - 8v = -8x + C$$

Como $v = x + y \to (x+y)^2 - 8(x+y) = -8x + C$. Por lo tanto

$$(x+y)^2 - 8y = C$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$(-1)^2 - 0 = C \to C = 1$$

Por lo tanto

$$(x+y)^2 - 8y = 1$$

Ejemplo Resolver la ecuación diferencial

$$x\frac{dy}{dx} = y - x$$

Solución En este caso hacemos

$$v = \frac{x}{y} \to y = \frac{x}{v} \to dy = \frac{dx}{v} - \frac{x}{v^2}dv$$

entonces

$$x\left(\frac{dx}{v} - \frac{x}{v^2}dv\right) = \left(\frac{x}{v} - x\right)dx$$

$$x\frac{dx}{v} - \frac{x^2}{v^2}dv = \frac{x}{v}dx - xdx$$

$$-\frac{x^2}{v^2}dv = -xdx$$

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{v} = \ln|x| + C$$

$$-\frac{y}{x} = \ln|x| + C$$

$$y = -x(\ln|x| + C)$$