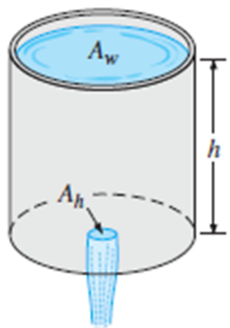
Ejemplo Drenado de un tanque.

En hidrodinámica, la **ley de Torricelli** establece que la rapidez v de salida del agua a través de un agujero de bordes afilados en el fondo de un tanque lleno con agua hasta una profundidad h es igual a la velocidad de un cuerpo (en este caso una gota de agua), que está cayendo libremente desde una altura h esto es, $v = \sqrt{2gh}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Esta última expresión surge al igualar la energía cinética, $\frac{1}{2}mv^2$ con la energía potencial, mgh, y despejar v. Suponga que un tanque lleno de agua se vacía a través de un agujero, bajo la influencia de la gravedad. Queremos encontrar la profundidad, h, del agua que queda en el tanque al tiempo t. Considere el tanque que se muestra en la imagen.



Si el área del agujero es A_h, (en pies^2) y la rapidez del agua que sale del tanque es $v = \sqrt{2gh}$ (en pies/s), entonces el volumen de agua que sale del tanque, por segundo, es $A_h\sqrt{2gh}$ (en pies3/s). Así, si V(t) denota al volumen de agua en el tanque al tiempo t, entonces

$$\frac{dV}{dt} = -A_h\sqrt{2gh}$$

donde el signo menos indica que V está disminuyendo. Observe que aquí estamos despreciando la posibilidad de fricción en el agujero, que podría causar una reducción de la razón de flujo.

Si ahora el tanque es tal que el volumen del agua al tiempo t se expresa como $V(t) = A_w h$, donde A_w (en pies^2) es el área constante de la superficie superior del agua (véase la imagen), entonces $\frac{dV}{dt} = A_w\frac{dh}{dt}$. Sustituyendo esta última expresión en la ecuación obtenemos la ecuación diferencial que deseábamos para expresar la altura del agua al tiempo t:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh}$$

Es interesante observar que la ecuación es válida aun cuando A_w, no sea constante. En este caso, debemos expresar el área de la superficie superior del agua en función de h, esto es, $A_w = A(h)$.

Ejemplo Sean $h(t)$ y $V(t)$ la altura y el volumen del agua en un estanque en el instante t. Si el agua se fuga por un agujero de área a que se encuentra en el fonde del tanque, entonces la ley de Torricelli afirma que

$$\frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

donde g es la aceleración debido a la gravedad.

a) Suponga que el tanque cilíndrico con altura 6 pies y radio 2 pies y que el agujero es circular de 1 pulgada. Si tomamos
$$g = 32\ \frac{pies}{s^2}$$
demuetre que y satisface la ecuación diferencial
$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{72}\sqrt{h}$$

b) Resuelva esta ecuación para hallar la altura del agua en el instante t, suponiendo que el tanque está lleno en el instante $t = 0$

c) ¿Cuanto tardará el agua en drenar por completo?

Demostración. a) Tenemos que
$$V = \pi r^2 h \ \Rightarrow \ \frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$
$$\Rightarrow \ \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi r^2}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\pi 2^2}\left[-\pi\left(\frac{1}{12}\right)^2\sqrt{2\cdot 32}\sqrt{h}\right] = -\frac{1}{72}\sqrt{h}$$

b) tenemos que
$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{72}\sqrt{h} \ \Rightarrow \ h^{-\frac{1}{2}}dh = -\frac{1}{72}dt \ \Rightarrow \ 2\sqrt{h} = -\frac{1}{72}t + C$$
$$h(0) = 6 \ \Rightarrow \ 2\sqrt{6} = 0 + C \ \Rightarrow \ C = 2\sqrt{6} \ \Rightarrow \ h(t) = \left(-\frac{1}{144}t + \sqrt{6}\right)^2$$

c) tenemos que
$$h = 0 = \left(-\frac{1}{144}t + \sqrt{6}\right)^2 \quad \Rightarrow \ t = 144\sqrt{6} \approx 5\ min\ 53\ s$$

□

Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial lineal de primer orden se puede escribir en la forma
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$
donde P y Q son funciones continuas en un determinado intervalo.

Ejemplo Una ecuación lineal es
$$xy' + y = 2x$$
porque para $x \neq 0$, se puede escribir en la forma
$$y' + \frac{1}{x}y = 2 \tag{2}$$

Observamos que esta ecuación diferencial no es separable porque no se puede factorizar la expresión para y' como una función de x por una función de y. Pero aún se puede resolver la ecuación si se nota, por la regla del producto, que

$$xy' + y = (xy)'$$

y, por tanto, la ecuación se puede reescribir como

$$(xy)' = 2x$$

Si ahora se integran ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$xy = x^2 + C \quad o \quad y = x + \frac{C}{x}$$

Si se hubiera tenido la ecuación diferencial en la forma de la ecuación 2, se habría tenido que tomar el paso preliminar de multiplicar cada lado de la ecuación por x.
Resulta que toda ecuación diferencial lineal de primer orden se puede resolver de un modo similar al multiplicar ambos lados de la ecuación 1 por una función adecuada $I(x)$ llamada factor integrante. Se intenta hallar I de modo que el lado izquierdo de la ecuación 1, cuando se multiplique por $I(x)$, se convierta en la derivada del producto $I(x)y$

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' \tag{3}$$

Si se puede hallar tal función I, en tal caso la ecuación 1 se convierte en

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x)$$

Al integrar ambos lados, se debe tener

$$I(x)y = \int I(x)Q(x)\ dx + C$$

de modo que la solución sería

$$y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)\ dx + C\right] \tag{4}$$

Para hallar tal I, se desarrolla la ecuación 3 y se cancelan términos:

$$\begin{aligned} I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' &= I'(x)y + I(x)y' \\ I(x)P(x) &= I'(x) \end{aligned}$$

Ésta es una ecuación diferencial separable para I, que se resulve como sigue

$$\begin{aligned} \int \frac{dI}{I} &= \int P(x)\ dx \\ \ln|I| &= \int P(x)\ dx \\ I &= Ae^{\int P(x)\ dx} \end{aligned}$$

donde $A = \pm\, e^C$. Se busca un factor de integración particular, no el más general, así que se toma $A = 1$ y se usa

$$I(x) = e^{\int \ P(x)\ dx}$$

En resuman para resolver la ecuación diferencial lineal

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

multiplique ambos lados por el factor de integración

$$I(x) = e^{\int \ P(x)\ dx}$$