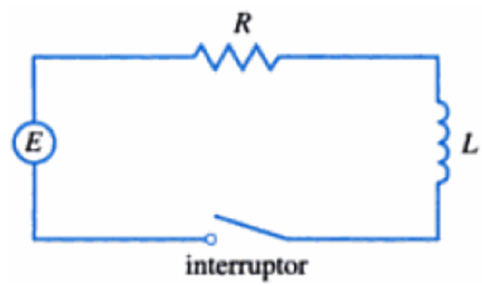
Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales Circuitos eléctricos

Una fuerza electromotriz (por lo general una batería o un generador) produce un voltaje de E(t) volts (V)y una corriente de I(t) amperes (A) en el instante t.
El circuito también contiene un resistor con una resistencia de R ohms (Ω) y un inductor con una inductancia de L henrys (H).



La ley de Ohm proporciona la caída de voltaje debida al resistor como RI. La caída de voltaje ocasionada por el inductor es

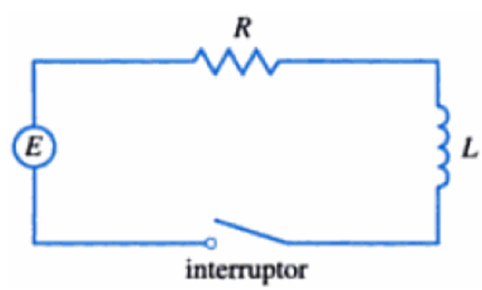
$$L\left(\frac{dI}{dt}\right)$$

Una de las leyes de Kirchhoff establece que la suma de la caída de voltaje es igual al voltaje proporcionado E(t).
Por lo que tenemos

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

lo cual es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La solución proporciona la corriente I en el tiempo t.

Ejemplo Suponga que en el circuito simple



la resistencia es de 12 Ω y que la inductancia es de 4 H. Si una batería proporciona un voltaje constante de 60 V y el interruptor está cerrado cuando $t = 0$, de modo que la corriente comience con $I(0) = 0$, determine

1. $I(t)$
2. La corriente después de 1 segundo

3. El valor límite de la corriente

Solución Si $L = 4$, $R = 12$ y $E(t) = 60$, en la ecuación obtenemos el problema con valor inicial

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60, \quad I(0) = 60$$

o equivalentemente

$$\frac{dI}{dt} + 3I = 15, \quad I(0) = 60$$

Al multiplicar por el factor $e^{\int 3\ dt} = e^{3t}$, obtenemos

$$\begin{aligned} e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I &= 15e^{3t} \\ \frac{d}{dt}\left(e^{3t}I\right) &= 15e^{3t} \\ e^{3t}I &= \int 15e^{3t}\ dt \\ e^{3t}I &= 5e^{3t} + C \\ I(t) &= 5 + Ce^{-3t} \end{aligned}$$

Puesto que $I(0) = 0$, tenemos que $5 + C = 0$, así que $C = -5$ y

$$I(t) = 5\left(1 - e^{-3t}\right)$$

(b) Después de 1 segundo, la corriente es igual a

$$I(1) = 5\left(1 - e^{-3}\right) \approx 4{,}75\ A$$

(c) tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} I(t) &= \lim_{t\to\infty} 5\left(1 - e^{-3t}\right) \\ &= 5 - 5\lim_{t\to\infty} e^{-3t} \\ &= 5 - 0 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Ejemplo Una **ecuación diferencial de Bernoulli** (en honor a James Bernoulli) es de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Observe que, si $n = 0$ o $n = 1$, la ecuación de Bernoulli es lineal.
Para otros valores de n, muestre que la sustitución $u = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli en la ecuación lineal

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$$

Solución Tenemos que

$$u = y^{1-n} \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{1-n}\frac{du}{dx}$$

$$u = y^{1-n} \;\Rightarrow\; u^{\frac{n}{1-n}} = y^n$$

$$u = y^{1-n} \;\Rightarrow\; u^{\frac{1}{1-n}} = y$$

Entonces la ecuación diferencial de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

nos da

$$\frac{u^{\frac{n}{1-n}}}{1-n}\frac{du}{dx} + P(x)u^{\frac{1}{1-n}} = Q(x)u^{\frac{n}{1-n}}$$

por lo que

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$$