Ecuaciones diferenciales de variables separables

Definición 1. *Una ecuación diferencial de variables separables tiene la forma*

$$f(x)\ dx + g(y)\ dy = 0$$

donde cada diferencial tiene como coeficiente una función de su propia variable, o una constante.

Método de solución Integración directa

$$\int f(x)\ dx + \int g(y)\ dy = 0$$

Cuando no puedensepararse las variables de una ecuación y no pueden agruparse en términos, en cada uno de los cuales estén las mismas variables, habrá que usar otros métodos para encontrar la solución.

Ejemplo Resolver el problema con condición inicial

$$e^{x+y}\ \frac{dy}{dx} = x, \quad y(0) = \ln\ 2$$

Solución En este caso tenemos

$$e^{x+y}\ \frac{dy}{dx} = x\ \Rightarrow\ e^x e^y\ \frac{dy}{dx} = x\ \Rightarrow\ e^y\ dy = x\ e^{-x}\ dx$$
$$\Rightarrow\ \int e^y\ dy = \int x\ e^{-x}\ dx\ \Rightarrow\ e^y = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

solución general en la forma implícita porque no está despejada la variable dependiente y, pero:

$$y = \ln\left|-xe^{-x} - e^{-x} + c\right|$$

solución gemeral explícita $y = f(x)$.
Aplicando las condiciones iniciales $y(0) = \ln\ 2$ en la solución general, ya sea en su forma explícita o implícita.
En la forma implícita:

$$\begin{aligned} e^{\ln\ 2} &= -0 - 1 + c \\ 2 &= -1 + c \\ c &= 3 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$e^y = -xe^{-x} - e^{-x} + 3$$

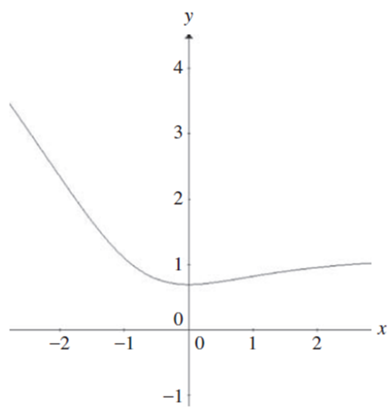
solución particular.
En la explícita

$$\begin{aligned} \ln\ 2 &= \ln|1(0-1) + c| \\ 2 &= -1 + c \\ c &= 3 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$y = \ln |e^{-x}(-x-1)+3|$$

cuya curva solución es



Ejemplo Resolver el problema con condición inicial

$$xy\,\frac{dy}{dx} = 1+y^2, \quad y(1)=3$$

Solución En este caso

$$\begin{aligned} xy\,\frac{dy}{dx} &= 1+y^2 \\ \Rightarrow\ \frac{y}{1+y^2}\,dy &= \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow\ \int \frac{y}{1+y^2}\,dy &= \int \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\ln\ |1+y^2| &= \ln\ |x| + \ln\ |c| \end{aligned}$$

La constante de integración no pierde su arbitrariedad, su carácter de cualquier número, si está afectada por funciones. Así, $\ln c = c$ porque el logaritmo natural de una constante también es una constante; del mismo modo se puede usar $e^c, c^2, \operatorname{sen} c, \cosh c$, etcétera.
Usando las propiedades de los logaritmos

$$\ln |1+y^2|^{\frac{1}{2}} = \ln |cx|$$

Aplicando exponencial:

$$|1+y^2|^{\frac{1}{2}} = |cx|$$

Elevando al cuadrado

$$1+y^2 = cx^2$$

por lo tanto

$$cx^2 - y^2 = 1$$

solución general implícita.
Al aplicar las condiciones iniciales $y(1) = 3$

$$c(1) - 9 = 1 \;\Rightarrow\; c = 10$$

por lo tanto

$$10x^2 - y^2 = 1$$

Aplicaciones de ecuaciones diferenciales de variables separables

Uno de los modelos para el crecimiento de la poblacón nos dice que la población crece con una rapidez proporcional a su tamaño

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

En general, si $P(t)$ es el valor de una cantidad y en el tiempo t si la razón de cambio de P cos respecto a t es proporcional a su tamaño $P(t)$ en cualquier momento, después

$$\frac{dP}{dt} = kP \tag{1}$$

donde k es una constante. La ecuación 1 se llama a veces ley de crecimiento natural $(k > 0)$, en tal caso se incrementa la pobleción; si $(k < 0)$, disminuye.
Debido a que es una ecuación diferencial separable se puede resolver

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= kP \\ \Rightarrow \int \frac{dP}{P} &= \int k\ dt \\ \Rightarrow \ln\ |P| &= kP + C \\ \Rightarrow |P| &= e^{kt+C} = e^C e^{kt} \\ \Rightarrow P &= Ae^{kt} \end{aligned}$$

Donde $A = (\pm\ e^C\ o\ 0)$ es una constante arbitraria. Para ver el significado de la constante A se observa que

$$P(0) = Ae^{k\ 0} = A$$

Por lo tanto, A es el valor inicial de la función.
La solución del problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = P_0$$

es

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Ejemplo La población de EU

Consideremos las cifras de los censos de EU desde 1790 dadas en la tabla

Año	t	Real	$P(t) = 3.9e^{0.03067t}$	Año	t	Real	$P(t) = 3.9e^{0.03067t}$
1790	0	3.9	3.9	1930	140	122	286
1800	10	5.3	5.3	1940	150	131	388
1810	20	7.2	7.2	1950	160	151	528
1820	30	9.6	9.8	1960	170	179	717
1830	40	12	13	1970	180	203	975
1840	50	17	18	1980	190	226	1 320
1850	60	23	25	1990	200	249	1 800
1860	70	31	33	2000	210		2 450
1870	80	38	45	2010	220		3 320
1880	90	50	62	2020	230		4 520
1890	100	62	84	2030	240		6 140
1900	110	75	114	2040	250		8 340
1910	120	91	155	2050	260		11 300
1920	130	105	210				

Veamos qué tan bien se ajusta el modelo de crecimiento ilimitado a estos datos. Medimos el tiempo en años y la población $P(t)$ en millones de personas. Hacemos $t = 0$ sea el año 1790, por lo que la condición inicial es $P(0) = 3{,}9$. El problema correspondiente de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = P_0 = 3{,}9$$

tiene

$$P(t) = 3{,}9e^{kt}$$

como solución. Pero no podemos usar este modelo para hacer predicciones porque no conocemos el valor de k. Sin embargo, sabemos que la población en el año 1800 era de 5.3 millones y podemos usar este valor para determinar k. Si hacemos

$$5{,}3 = P(10) = 3{,}9e^{k\cdot 10}$$

tenemos entonces

$$e^{k\ 10} = \frac{5{,}3}{3{,}9}$$

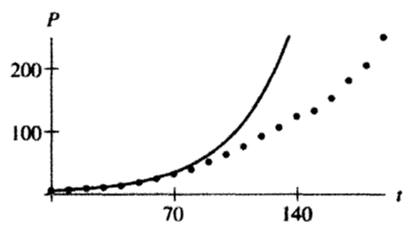
$$10\ k = \ln\left(\frac{5{,}3}{3{,}9}\right)$$

$$k \approx 0{,}03067$$

Nuestro modelo predice entonces que la población de EU está dada por

$$P(t) = 3{,}9\ e^{0{,}03067\ t}$$

Como vemos en la gráfica, este modelo de $P(t)$ predice razonablemente bien la población hasta aproximadamente 1860, pero después de este año la predicción resulta muy grande.



Los puntos representan datos reales del censo y la línea continua es la solución del modelo de crecimiento exponencial

$$\frac{dP}{dt} = 0.03067\, P.$$

El tiempo t se mide en años desde el año 1790.

Nuestro modelo es bastante bueno siempre que la población sea relativamente pequeña. Sin embargo, con el paso del tiempo el modelo predice que la población continuará creciendo sin límite, y obviamente esto no sucede en el mundo real.

Modelo logístico La ecuación es anterior es apropiada para modelar el crecimiento de poblaciones en condiciones ideales, pero tenemos que reconocer que un modelo más realista debe reflejar que un medio dado tiene recursos limitados. Muchas poblaciones empiezan creciendo de una manera exponencial, pero se nivelan cuando tienden a su capacidad de contensión K (o decrecen hacia K, si llegarán a sobrepasarla). Para que un modelo tome en cuenta ambas tendencias, establecemos dos hipótesis:

$\dfrac{dP}{dt} \approx kP$ si P es pequeña (al inicio, la rapidez de crecimiento es proporcional a P).

$\dfrac{dP}{dt} < 0$ si $P > k$ (P disminuye si nunca excede a k).

Una expresión simple que incorpora ambas suposiciones, es:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Observe que si P es pequeña en comparación con K, enseguida $\dfrac{P}{K}$ se aproxima a 0 y, por lo tanto, $\dfrac{dP}{dt} \approx kP$. Si $P > K$, después $1 - \dfrac{P}{K}$ es negativa y, por lo tanto, $\dfrac{dP}{dt} < 0$.

La ecuación

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

se llama ecuación diferencial logística y el biologo matemático holandés Verhulst la propuso, como un modelo para el crecimiento de la población mundial en la década de 1840.

La ecuación logística es separable y, por lo tanto, se puede resolver de manera explícita

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \;\Rightarrow\; \int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \int k\, dt$$

Para evaluar la integral del lado izquierdo, se escribe

$$\frac{1}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \frac{K}{P(K-P)}$$

Al emplear fracciones parciales, se obtiene

$$\frac{K}{P(K-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}$$

POr lo que

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{K}\right)} &= \int k\ dt \\
\Rightarrow \int \left(= \frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}\right) dP &= \int k\ dt \\
\Rightarrow \ln|P| - \ln|K-P| &= kt * C \\
\Rightarrow \ln\left|\frac{K-P}{P}\right| &= -kt - C \\
\Rightarrow \left|\frac{K-P}{P}\right| &= e^{-kt-C} = e^{-C}e^{-kt} \\
\Rightarrow \frac{K-P}{P} &= Ae^{-kt}
\end{aligned}
$$

donde $A = \pm\ e^{-C}$. Ahora bien

$$\frac{K-P}{P} = Ae^{-kt} \ \Rightarrow\ \frac{K}{P} - 1 = Ae^{-kt} \ \Rightarrow\ P = \frac{K}{1+Ae^{-kt}}$$

Por lo tanto

$$P = \frac{K}{1+Ae^{-kt}}$$

Se encuentra el valor de A si se escribe $t = 0$, después $P = P_0$ en la expresión

$$\frac{K-P_0}{P_0} = Ae^{-k\cdot 0} \ \Rightarrow\ \frac{K-P_0}{P_0} = A$$

Así, la solución para la ecuación logística es

$$P(t) = \frac{K}{1+Ae^{-kt}} \quad donde \quad A = \frac{K-P_0}{P_0}$$

Ejemplo Escriba el modelo del problema con valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08\ P\left(1 - \frac{P}{1000}\right), \quad P(0) = 100$$

Solución En este caso la ecuación diferencial es una ecuación logística con $k = 0{,}08$, capacidad de soporte $K = 1000$, y la población inicial $P_0 = 100$. Por lo tanto

$$P(t) = \frac{1000}{1+Ae^{-0{,}08t}} \quad donde \quad A = \frac{1000-100}{100} = 9$$

Así

$$P(t) = \frac{1000}{1+9e^{-0{,}08t}}$$