Soluciones cerca de puntos singulares

Definición 1. *Suponga que la ecuación diferencial lineal de segundo orden*

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \tag{1}$$

se escribe en forma estándar

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2}$$

donde $P(x) = \dfrac{B(x)}{A(x)}$ *y* $Q(x) = \dfrac{C(x)}{A(x)}$

Definición 2. *Se dice que un punto x_0 es un punto ordinario de la ecuación diferencial (1) si tanto $P(x)$ como $Q(x)$ en la forma estándar (2) son analíticas en x_0. Se dice que un punto que no es punto ordinario es un **punto singular** de la ecuación.*

Ejemplo Dada la ecuación

$$x^2(1+x)y'' + x(4-x^2)y' + (2+3x)y = 0$$

esta se puede escribir

$$y'' + \frac{4-x^2}{x(1+x)}y' + \frac{2+3x}{x^2(1+x)}y = 0$$

En este caso $x_0 = 0$ es un punto singular.

Coeficientes polinomiales Se pone atención sobre todo al caso cuando (1) tiene coeficientes polinomiales. Un polinomio es analítico en cualquier valor x y una función racional es analítica excepto en los puntos donde su denominador es cero. Por tanto si $A(x)$, $B(x)$ y $C(x)$ son polinomios sin factores comunes, entonces ambas funciones racionales $P(x) = \dfrac{B(x)}{A(x)}$ y $Q(x) = \dfrac{C(x)}{A(x)}$ son analíticas excepto donde $A(x) = 0$. Entonces, se tiene que
$x = x_0$ es un punto ordinario de (1) si $A(x) \neq 0$ mientras que $x = x_0$ es un punto singular de (1) si $A(x) = 0$.

Ejemplo Los únicos puntos singulares de la ecuación

$$(x^2-1)y'' + 2xy' + 6y = 0$$

son soluciones de $x^2 - 1 = 0$ o $x = \pm\, 1$. Todos los otros valores finitos de x son puntos ordinarios. Los puntos singulares no necesitan ser números reales.

Ejemplo La ecuación

$$(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$$

tiene puntos singulares en las soluciones $x^2 + 1 = 0$, en particular, $x = \pm\, i$. Los otros valores de x, reales o complejos, son puntos ordinarios.

Teorema 1. *Existencia de soluciones en series de potencias.*
Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial (1), siempre es posible encontrar dos soluciones linealmente independientes en la forma de una serie de potencias centrada en x_0, es decir,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

Una solución en serie converge por lo menos en un intervalo definido por $|x - x_0| < R$, donde R es la distancia desde x_0 al punto singular más cercano.

Ejemplo Resuelva la ecuación

$$(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$$

Solución En este caso la ecuación diferencial dada tiene puntos singulares en $x = \pm\, i$, por tanto, una solución en serie de potencias centrada en 0 que converge al menos para $|x| < 1$ donde 1 es la distancia en el plano complejo desde 0 a i o -i. La suposición

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

y sus primeras dos derivadas conducen a

$$(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0 \ \Rightarrow\ (x^2 + 1) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n\ c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

donde

$$(x^2 + 1) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n\ c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\ c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + 2c_2 + 6c_3 x + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n\ c_n x^n - c_0 - c_1 x - \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$$

$$= 2c_2 + 6c_3 x + c_1 x - c_0 - c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n\ c_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$$

$$= 2c_2 + 6c_3 x - c_0 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n\ c_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$$

$$= 2c_2 + 6c_3 x - c_0 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n\ c_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$$

$$= 2c_2 + 6c_3 x - c_0 + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)c_n + (n+2)(n+1)c_{n+2} + n\ c_n - c_n] x^n$$

$$= 2c_2 + 6c_3x - c_0 + \sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)c_n + (n+2)(n+1)c_{n+2} + (n-1)\ c_n]x^n$$

$$= 2c_2 + 6c_3x - c_0 + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)(n-1)c_n + (n+2)(n+1)c_{n+2}]x^n$$

De acuerdo a esto último, llegamos a la conclusión

$$2c_2 - c_0 = 0$$

$$6c_3 = 0$$

$$(n+1)(n-1)c_n + (n+2)(n+1)c_{n+2} = 0$$

Por consiguiente

$$c_2 = \frac{1}{2}c_c$$
$$c_3 = 0$$
$$c_{n+2} = \frac{1-k}{k+2}c_n$$

Sustituimos $n = 2, 3, 4, , 5, 6$ en la última ecuación, y obtenemos

$$c_4 = -\frac{1}{4}c_2 = -\frac{1}{1\cdot 4}c_0 = -\frac{1}{2^2 2!}c_0$$
$$c_5 = -\frac{2}{5}c_3 = 0$$
$$c_6 = -\frac{3}{6}c_4 = \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}c_0 = \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}c_0$$
$$c_7 = -\frac{4}{7}c_5 = 0$$
$$c_8 = -\frac{5}{8}c_6 = -\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}c_0 = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}c_0$$
$$c_9 = -\frac{6}{9}c_7 = 0$$
$$c_{10} = -\frac{7}{10}c_8 = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}c_0 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5 5!}c_0$$

etcétera. Por tanto,

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + c_8x^8 + c_9x^9 + c_{10}x^{10} + \cdots \\ &= c_0\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2^2 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}x^6 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}x^8 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5 5!}x^{10} - \cdots\right) + c_1x \\ &= c_0y_1(x) + c_1y_2(x) \end{aligned}$$

Las soluciones son el polinomio $y_2(x) = x$ y la serie de potencias

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^{2n}, \quad |x| < 1$$

Tipos de puntos singulares Una ecuación diferencial con un punto singular en 0 comúnmente no tendrá soluciones en serie de potencias de la forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, de tal manera que el método de cálculo falla en este caso. Para investigar la forma que podría tomar la solución de una ecuación de este tipo, se considera que los coeficientes de la ecuación (2) tienen funciones analíticas, por lo que se reescribe la ecuación en la forma estándar

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

donde $P(x) = \dfrac{B(x)}{A(x)}$ y $Q(x) = \dfrac{C(x)}{A(x)}$.

Recuérdese que $x = 0$ es un punto ordinario (en oposición a un punto singular) de la ecuación (2) si las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ son analíticas en $x = 0$; esto es, si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen desarrollos en serie de potencias de x convergentes en algún intervalo abierto que contenga $x = 0$. Puede ahora probarse que cada una de las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ o es analítica o se aproxima a $\pm\infty$ conforme $x \to 0$. En consecuencia, $x = 0$ es un punto singular de la ecuación (2) siempre que $P(x)$ o $Q(x)$ (o ambas) se aproximen a $\pm\infty$ conforme $x \to 0$. Por ejemplo,

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0$$

se observa que $P(x) = \dfrac{1}{x}$ y $Q(x) = 1 - \dfrac{n^2}{x^2}$ tienden a infinito conforme $x \to 0$. En seguida se presentará que la aplicación del método de series de potencias puede generalizarse para aplicarse cerca del punto singular $x = 0$ en la ecuación (2), siempre que $P(x)$ tienda a infinito más lentamente que $\dfrac{1}{x}$, y $Q(x)$ no más rápido que $\dfrac{1}{x^2}$ conforme $x \to 0$. Ésta es una forma de decir que $P(x)$ y $Q(x)$ tienen únicamente singularidades "débiles" en $x = 0$. Para establecer esto con mayor precisión, se reescribe la ecuación (2) en la forma

$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0 \tag{3}$$

donde

$$p(x) = x\ P(x) \quad y \quad q(x) = x^2 Q(x) \tag{4}$$

Definición 3. *Punto singular regular.*
El punto singular $x = 0$ de la ecuación (3) es un punto singular regular si las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son ambas analíticas en $x = 0$. De otra manera es un punto singular irregular.

En particular, el punto singular $x = 0$ es un punto singular regular si p(x) y q(x) son ambas polinomios. Por ejemplo, se observa que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - n^2}{x^2}y = 0$$

nótese que $p(x) \equiv 1$ y $q(x) = x^2 - n^2$ son ambas polinomios en x.
En contraste, considérese la ecuación

$$2x^3y'' + (1 + x)y' + 3xy = 0$$

la cual tiene el punto singular $x = 0$. Si esta ecuación se escribe en la forma de (3), se obtiene

$$y'' + \frac{\frac{(1+x)}{2x^2}}{x}y' + \frac{\frac{3}{2}}{x^2}y = 0$$

Debido a que

$$p(x) = \frac{1+x}{2x^2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x} \to \infty$$

conforme $x \to 0$ (aunque $q(x) \equiv \dfrac{3}{2}$ es un polinomio), se observa que $x = 0$ es un punto singular irregular. No se discutirá la solución de ecuaciones diferenciales cercanas a puntos singulares irregulares; éste es un tema considerablemente más avanzado que la solución de ecuaciones diferenciales cercanas a puntos singulares regulares.

Ejemplo Considérese la ecuación diferencial

$$x^2(1+x)y'' + x(4-x^2)y' + (2+3x)y = 0$$

En la forma $y'' + Py' + Qy = 0$; esto es

$$y'' + \frac{4-x^2}{x(1+x)}y' + \frac{2+3x}{x^2(1+x)}y = 0$$

Debido a que

$$P(x) = \frac{4-x^2}{x(1+x)} \quad y \quad Q(x) = \frac{2+3x}{x^2(1+x)}$$

ambos coeficientes tienden a ∞ conforme $x \to 0$, donde se observa que $x = 0$ es un punto singular. Para determinar la naturaleza de este punto singular, debe escribirse la ecuación diferencial en la forma de la ecuación (3):

$$y'' + \frac{\frac{4-x^2}{1+x}}{x}y' + \frac{\frac{2+3x}{1+x}}{x^2}y = 0$$

De este modo,

$$p(x) = \frac{4-x^2}{1+x} \quad y \quad q(x) = \frac{2+3x}{1+x}$$

Debido a que el cociente de los polinomios es analítico en cualquier punto siempre que el denominador sea diferente de cero, se observa que p(x) y q(x) son ambas analíticas en $x = 0$. En consecuencia, $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial dada.

Puede suceder que cuando se empieza con una ecuación diferencial en la forma general dada en la ecuación (1), y se reescribe en la forma en (3), las funciones p(x) y q(x), tal como se dan en (4), son formas indeterminadas en $x = 0$. En este caso, La situación es determinada por los límites

$$p_0 = p(0) = \lim_{x\to 0} p(x) = \lim_{x\to 0} xP(x) \tag{5}$$

y

$$q_0 = q(0) = \lim_{x\to 0} q(x) = \lim_{x\to 0} x^2Q(x) \tag{6}$$

Si $p_0 = 0 = q_0$, entonces $x = 0$ puede ser un punto ordinario de la ecuación diferencial $x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$ en (3). De otro modo,

a) Si los límites en (5) y (6) existen y son finitos, entonces $x = 0$ es un punto singular regular.

b) Si alguno de los límites no existe o es infinito, entonces $x = 0$ es un punto singular irregular.

El caso más común en las aplicaciones para la ecuación diferencial escrita en la forma

$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0$$

es que las funciones p(x) y q(x) son polinomios. En tal situación, $p_0 = p(0)$ y $q_0 = q(0)$ son simplemente los términos constantes de esos polinomios, por lo que no hay necesidad de evaluar los límites en las ecuaciones (5) y (6).