Soluciones en series cerca de puntos ordinarios

El método de series de potencias introducido puede utilizarse para ecuaciones lineales de cualquier orden (también para ciertas ecuaciones no lineales), pero su aplicación más importante es para las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden de la forma

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \tag{1}$$

donde los coeficientes A, B y C son funciones analíticas de x. En realidad, en la mayoría de las aplicaciones estos coeficientes son funciones algebraicas. la ecuación (1) debe reescribirse en la forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2}$$

con el coeficiente principal igual a 1 y con $P = \dfrac{B}{A}$ y $P = \dfrac{C}{A}$. Nótese que $P(x)$ y $Q(x)$ generalmente no son analíticas en los puntos donde $A(x)$ se anula.

Ejemplo Considere la ecuación

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{3}$$

Las funciones coefi ciente dadas en (3) son continuas en cualquier parte. Pero en la forma (2), esta es la ecuación

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0 \tag{4}$$

con $P(x) = \dfrac{1}{x}$ no analítica en $x = 0$.

El punto $x = a$ se llama un **punto ordinario** de la ecuación (2) y de la equivalente ecuación (1) siempre que las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ son analíticas en $x = a$. De lo contrario, $x = a$ sería un punto singular. Así, el único punto singular de las ecuaciones (3) y (4) es $x = 0$. Recuérdese que el cociente de las funciones analíticas es analítico en cualquier lugar donde el denominador sea diferente de cero. Se concluye que si $A(a) \neq 0$ en la ecuación (1) con coeficientes analíticos, entonces $x = a$ es un **punto ordinario**. Si $A(x)$, $B(x)$ y $C(x)$ son polinomios sin factores comunes, entonces $x = a$ es un punto ordinario solamente si $A(a) \neq 0$.

Ejemplo El punto $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación

$$xy'' + (\text{sen } x)y' + x^2y = 0$$

a pesar del hecho de que $A(x) = x$ se anula en $x = 0$. La razón es que

$$P(x) = \frac{\text{sen } x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\cdots$$

es, sin embargo, analítica en $x = 0$, pues al dividir entre x resulta en una serie de potencias convergente.

Ejemplo El punto $x = 0$ no es un punto ordinario de la ecuación

$$y'' + x^2y' + x^{\frac{1}{2}}y = 0$$

Porque mientras $P(x) = x^2$ es analítica en el origen, $Q(x) = x^{\frac{1}{2}}$ no lo es. El motivo es que $Q(x)$ no es derivable en $x = 0$, por tanto, tampoco es analítica en ese punto.

Ejemplo El punto $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación

$$(1 - x^3)y'' + (7x^2 + 3x^5)y' + (5x - 13x^4)y = 0$$

debido a que las funciones de los coeficientes $A(x)$, $B(x)$ y $C(x)$ son polinomios con $A(0) \neq 0$.

Se afirma que la ecuación (2) tiene dos soluciones linealmente independientes en cualquier intervalo abierto donde las funciones de los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas. El hecho básico de la presente propuesta es que cerca de un punto ordinario a, estas soluciones serán series de potencia en potencias de $x - a$.

Teorema 1. *Soluciones cercanas a un punto ordinario.*
Supóngase que a es un punto ordinario de la ecuación

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \tag{5}$$

esto es, las funciones $P = \dfrac{B}{A}$ *y* $P = \dfrac{C}{A}$ *son analíticas en* $x = a$. *Entonces la ecuación (5) tiene dos soluciones linealmente independientes, cada una de la forma*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \tag{6}$$

El radio de convergencia de cualquier solución de este tipo es al menos tan grande como la distancia desde a al punto singular (real o complejo) más cercano de la ecuación (5). Los coeficientes en la serie dada en (6) pueden determinarse sustituyéndose en la ecuación (5).

Ejemplo Determine soluciones generales en términos de potencias de x de la ecuación

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$$

Solución En este caso $A(x) = x^2 - 1,\ B(x) = 4x,\ C(x) = 2$ son analíticas en $x_0 = 0$.
Si dividimos entre $x^2 - 1$ tenemos

$$y'' + \frac{4x}{x^2 - 1}y' + \frac{2y}{x^2 - 1} = 0$$

por lo que los puntos sigulares son $\pm$ 1. Y el radio de convergencia es $\rho = 1$. Proponemos entonces

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n\ c_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

de tal manera que al sustituir en la ecuación

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$$

obtenemos

$$(x^2 - 1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 4x\sum_{n=1}^{\infty} n\ c_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

Para el primer término se tiene

$$\begin{aligned}(x^2-1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2} &= x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^{n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)c_n-(n+1)(n+2)c_{n+2}]x^{n}\end{aligned}$$

Para el segundo término se tiene

$$\begin{aligned}4x\sum_{n=1}^{\infty}n\ c_nx^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty}4n\ c_nx^{n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}4n\ c_nx^{n}\end{aligned}$$

Para el tercer término se tiene

$$2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}2c_nx^n$$

Al regresar a nuestra expresión

$$(x^2-1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+4x\sum_{n=1}^{\infty}n\ c_nx^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)c_n-(n+1)(n+2)c_{n+2}]x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}4n\ c_nx^{n}+2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

que se puede escribir

$$\sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)c_n-(n+1)(n+2)c_{n+2}+4nc_n+2c_n]x^{n}=0$$

se debe cumplir entonces $n(n-1)c_n-(n+1)(n+2)c_{n+2}+4nc_n+2c_n=0$ por lo que

$$\begin{aligned}n(n-1)c_n-(n+1)(n+2)c_{n+2}+4nc_n+2c_n=0&\\ &\Rightarrow (n(n-11)+4n+2)c_n-(n+2)(n+1)c_{n+2}=0\\ &\Rightarrow (n^2-n+4n+2)c_n-(n+2)(n+1)c_{n+2}=0\\ &\Rightarrow (n^2+3n+2)c_n-(n+2)(n+1)c_{n+2}=0\\ &\Rightarrow (n+2)(n+1)c_n-(n+2)(n+1)c_{n+2}=0\\ &\Rightarrow c_n=c_{n+2}\end{aligned}$$

esto significa que

$$c_0 = c_2 = c_4 = \cdots$$

$$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots$$

Por lo que nuestra propuesta de solución queda

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_0 x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_1 x^{2n+1} \\
&= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \\
&= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + c_1 x \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \\
&= (c_0 + c_1 x) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \\
&= (c_0 + c_1 x) \left(\frac{1}{1 - x^2} \right)
\end{aligned}$$