Método del factor integrante

Dada la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

si multiplicamos ambos miembros por dx, la podemos expresar como

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0$$

Es claro que esta forma diferencial no es exacta, pero se vuelve exacta al multiplicarla por el factor

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Para ver esto, se tiene

$$e^{\int P(x)dx}[P(x)y - Q(x)]dx + e^{\int P(x)dx}dy = 0$$

tenemos entonces que

$$M(x,y) = e^{\int P(x)dx}[P(x)y - Q(x)] \;\Rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\int P(x)dx}[P(x)y - Q(x)]\right) = e^{\int P(x)dx}P(x)$$

Mientras que

$$N(x,y) = e^{\int P(x)dx} \;\Rightarrow\; \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\int P(x)dx}\right) = e^{\int P(x)dx}P(x)$$

por lo tanto

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

y la ecuación es exacta.
Tenemos que la forma es

$$[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)]dx + \mu(x)dy = 0$$

Esto conduce a generalizar el concepto de factor integrante.

Definición 1. *Si la ecuación*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

no es exacta, pero la ecuación

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{2}$$

resultante de multiplicar la ecuación (**??**) *por la función* $\mu(x,y)$ *si es exacta, entonces* $\mu(x,y)$ *es un factor integrante de la ecuación* (**??**)

Como se encuentra un factor integrante Si $\mu(x,y)$ es un factor integrante de (**??**) con primeras derivadas parciales continuas, se debe tener

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)M(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)N(x,y)\right)$$

aplicando la regla del producto

$$\mu(x,y)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)+M(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y)=\mu(x,y)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)+N(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)$$

esto se puede ecribir

$$M(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y)-N(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)=\mu(x,y)\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right) \tag{3}$$

Pero en la ecuación diferencial parcial (**??**) despejar a μ es normalmente más difícil que resolver la ecuación original (**??**). Existen, sin embargo, dos excepciones importantes.
Supongamos que la ecuación (**??**) tiene un factor integrante que depende solamente de x; esto es $\mu=\mu(x)$. En este caso, la ecuación (**??**) se reduce a la ecuación separable

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}=\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right)\mu \tag{4}$$

donde $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ sólo depende de x. En este caso

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mu}{\partial x}=\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right)\mu \;\Rightarrow\; \frac{\partial \mu}{\mu}&=\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right)dx\\ \Rightarrow\; \int\frac{\partial \mu}{\mu}&=\int\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right)dx\\ \Rightarrow\; \ln(\mu)&=\int\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right)dx\\ \Rightarrow\; \mu(x)&=e^{\int\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right)dx}\end{aligned}$$

De manera similar si la ecuación (**??**) tiene un factor integrante que sólo depende de y, entonces la ecuación (**??**) se reduce a la ecuación separable

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}=\left(\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}\right)\mu \tag{5}$$

donde $\left(\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}\right)$ sólo depende de y. En este caso

$$\mu(y)=e^{\int\left(\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}\right)dy}$$

Método para hallar factores integrantes Si la forma diferencial

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

no es separable ni lineal, calcule

$$\frac{\partial M}{\partial y}, \quad y \quad \frac{\partial N}{\partial x}$$

y si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

entonces la ecuación es exacta. Si no es exacta, considere

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

si ésta expresión sólo depende de x, entonces un factor integrante está dado por

$$\mu(x) = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \right) dx}$$

En caso contrario considere

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

si ésta expresión sólo depende de y, entonces un factor integrante está dado por

$$\mu(y) = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \right) dy}$$

Ejemplo identifique la ecuación como separable, lineal, exacta o que tenga un factor integrante que sólo dependa de x o sólo dependa de y.

a) $(2x + yx^{-1})dx + (xy - 1)dy = 0$

b) $(x^2 \operatorname{sen}(x) + 4y)dx + xdy = 0$

Solución Tenemos que

a) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \dfrac{x^{-1} - y}{xy - 1} = \dfrac{1 - xy}{x(xy - 1)} = -\dfrac{1}{x}$

Como el factor

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln(x)} = e^{\ln(x^{-1})} = \frac{1}{x}$$

se tiene

$$\frac{1}{x}(2x + yx^{-1})dx + \frac{1}{x}(xy - 1)dy = 0$$

simplificando

$$\left(2 + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$$

Vamos acomprobar que es exacta, en este caso

$$M(x, y) = 2 + \frac{y}{x^2} \ \Rightarrow \ \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x^2}$$

$$N(x,y)=y-\frac{1}{x} \ \Rightarrow \ \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{x^2}$$

se tiene entonces que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

por tanto la ecuación es exacta

b) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\dfrac{x^2\operatorname{sen}(x)+4y}{x}=\dfrac{4-1}{x)}=\dfrac{3}{x}$

Como el factor

$$\mu(x)=e^{\int \frac{3}{x}\,dx}=e^{3\ln(x)}=e^{\ln(x^3)}=x^3$$

se tiene

$$x^3(x^2\operatorname{sen}(x)+4y)dx+x^4dy=0$$

simplificando

$$\left(x^5\operatorname{sen}(x)+x^34y\right)dx+\left(x^4\right)dy=0$$

Vamos acomprobar que es exacta, en este caso

$$M(x,y)=x^5\operatorname{sen}(x)+x^34y \ \Rightarrow \ \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=4x^3$$

$$N(x,y)=x^4 \ \Rightarrow \ \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)=4x^3$$

se tiene entonces que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

por tanto la ecuación es exacta