Método de Frobenius

Dada la ecuación diferencial

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \tag{1}$$

se escribe en forma estándar

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2}$$

Teorema 1. *Teorema de Frobenius.*
Si $x = x_0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial (1), entonces existe al menos una solución de la forma

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r} \tag{3}$$

donde el número r es una constante por determinar. La serie converge por lo menos en algún intervalo $0 < x - x_0 < R$.

El método de Frobenius, para encontrar soluciones en serie respecto a un punto singular regular x_0, es similar al método de coeficientes indeterminados de series en la que se sustituye $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$ en la ecuación diferencial dada y se determinan los coeficientes desconocidos c_n con una relación de recurrencia. Sin embargo, se tiene una tarea más en este procedimiento: antes de determinar los coeficientes, se debe encontrar el exponente desconocido r. Si se encuentra que r es un número que no es un entero negativo, entonces la solución correspondiente $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$ no es una serie de potencias. Como se hizo en el análisis de soluciones respecto a puntos ordinarios siempre supondremos, por razones de simplicidad al resolver ecuaciones diferenciales, que el punto singular regular es $x = 0$.

Ejemplo Debido a que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial

$$3xy'' + y' - y = 0 \tag{4}$$

tratamos de encontrar una solución de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$. Ahora

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} \quad y \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
3xy'' + y' - y &= 3x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} - y' = \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(3n+3r-2)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} \\
&= x^r\left[r(3r-2)c_0x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(3n+3r-2)c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n\right] \\
&= x^r\left[r(3r-2)c_0x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}[(k+r+1)(3k+3r+1)c_{k+1} - c_k]x^k\right] = 0
\end{aligned}
$$

lo que implica que

$$r(3r-2)c_0 = 0$$

y

$$(k+r+1)(3k+3r+1)c_{k+1} - c_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ya que no se ha ganado nada al hacer $c_0 = 0$, entonces debemos tener

$$r(3r-2)c_0 = 0 \tag{5}$$

y

$$c_{k+1} = \frac{c_k}{(k+r+1)(3k+3r+1)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

Cuando se sustituye en (6), los dos valores de r que satisfacen la ecuación cuadrática (5), $r_1 =)\frac{2}{3}$ y $r_2 = 0$, se obtienen dos relaciones de recurrencia diferentes:

$$r_1 = \frac{2}{3}, \quad c_{k+1} = \frac{c_k}{(3k+5)(k+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

$$r_2 = 0, \quad c_{k+1} = \frac{c_k}{(k+1)(3k+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

De (7) encontramos

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{c_0}{5\cdot 1} \\
c_2 &= \frac{c_1}{8\cdot 2} = \frac{c_0}{2!\cdot 5\cdot 8} \\
c_3 &= \frac{c_2}{11\cdot 3} = \frac{c_0}{3!\cdot 5\cdot 8\cdot 11} \\
&\vdots \\
c_n &= \frac{c_0}{n!\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)}
\end{aligned}
$$

De (8) encontramos

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{c_0}{1\cdot 1} \\
c_2 &= \frac{c_1}{2\cdot 4} = \frac{c_0}{2!\cdot 1\cdot 4} \\
c_3 &= \frac{c_2}{3\cdot 7} = \frac{c_0}{3!\cdot 1\cdot 4\cdot 7} \\
&\vdots \\
c_n &= \frac{c_0}{n!\cdot 1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}
\end{aligned}
$$

Aquí se encuentra algo que no ocurrió cuando se obtuvieron soluciones respecto a un punto ordinario; se tiene lo que parecen ser dos conjuntos de coeficientes diferentes, pero cada conjunto contiene el mismo múltiplo c_0. Si se omite este término, las soluciones en serie son

$$y_1(x) = (x)^{\frac{2}{3}}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)} x^n\right] \tag{9}$$

$$y_2(x) = (x)^0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)} x^n\right] \tag{10}$$

Con el criterio de la razón se puede demostrar que (9) y (10) convergen para todos los valores de x; es decir, $|x| < \infty$. También debe ser evidente de la forma de estas soluciones que ninguna serie es un múltiplo constante de la otra y, por tanto $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente independientes en todo el eje x. Así, por el principio de superposición, $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ es otra solución de (4). En cualquier intervalo que no contenga al origen, tal como $(0, \infty)$, esta combinación lineal representa la solución general de la ecuación diferencial.

Ecuación indicial La ecuación (5) se llama ecuación indicial del problema y los valores $r_1 = \dfrac{2}{3}$ y $r_2 = 0$ se llaman **raíces indiciales**, o **exponentes**, de la singularidad $x = 0$. En general, después de sustituir $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ en la ecuación diferencial dada y simplificando, la **ecuación indicial** es una ecuación cuadrática en r que resulta de igualar a cero el coeficiente total de la potencia mínima de x. Se encuentran los dos valores de r y se sustituyen en una relación de recurrencia como (6). Es posible obtener la ecuación indicial antes de sustituir $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ en la ecuación diferencial. Si $x = 0$ es un punto singular regular de (1), entonces por definición ambas funciones $p(x) = xP(x)$ y $q(x) = x^2Q(x)$, donde P y Q se definen por la forma estándar (2), son analíticas en $x = 0$; es decir, los desarrollos en serie de potencias

$$p(x) = xP(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots \qquad y \qquad q(x) = x^2Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots \tag{11}$$

son válidas en intervalos que tienen un radio de convergencia positivo. Multiplicando (1) por x^2, se obtiene la forma dada en (2):

$$x^2y'' + x[xP(x)]y' + [x^2Q(x)]y = 0 \tag{12}$$

Después de sustituir $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ y las dos series en las ecuaciones (11) y (12) y realizando la multiplicación de la serie, se encuentra que la ecuación indicial general es

$$r(r-1) + c_0r + b_0 = 0 \tag{13}$$

donde c_0 y b_0 son como se define en (11).

Ejemplo Resuelva

$$2xy'' + (1+x)y' + y = 0$$

solución Sustituyendo $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
2xy'' + (1+x)y' + y &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)c_n x^{n+r} \\
&= x^r\left[r(2r-1)c_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)c_n x^n\right] \\
&= x^r\left[r(2r-1)c_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}[(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1} + (k+r+1)c_k]x^k\right]
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$r(2r-1) = 0 \tag{14}$$

$$(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1} + (k+r+1)c_k = 0 \tag{15}$$

$k = 0, 1, 2, ...$ De (14) vemos que las raíces indiciales son $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = 0$.
Para $r_1 = \frac{1}{2}$ se puede dividir entre $k + \frac{3}{2}$ en (15) para obtener

$$c_{k+1} = \frac{-c_k}{2(k+1)} \tag{16}$$

mientras que para $r_2 = 0$, (15) se convierte en

$$c_{k+1} = \frac{-c_k}{2k+1} \tag{17}$$

De (16) encontramos

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{-c_0}{2\cdot 1}\\
c_2 &= \frac{-c_1}{2\cdot 2} = \frac{c_0}{2^2\cdot 2!}\\
c_3 &= \frac{-c_2}{2\cdot 3} = \frac{-c_0}{2^3\cdot 3!}\\
c_4 &= \frac{-c_3}{2\cdot 4} = \frac{-c_0}{2^4\cdot 4!}\\
&\vdots\\
c_n &= \frac{(-1)^n c_0}{2^n n!}
\end{aligned}
$$

De (17) encontramos

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{-c_0}{1}\\
c_2 &= \frac{-c_1}{3} = \frac{c_0}{1\cdot 3}\\
c_3 &= \frac{-c_2}{5} = \frac{-c_0}{1\cdot 3\cdot 5}\\
c_4 &= \frac{-c_3}{7} = \frac{c_0}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\\
&\vdots\\
c_n &= \frac{(-1)^n c_0}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}
\end{aligned}
$$

Por lo que para la raíz indicial $r_1 = \frac{1}{2}$ se obtiene la solución

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}x^{n+\frac{1}{2}}$$

donde de nuevo se omitió c_0. Esta serie converge para $x \geq 0$; como se ha dado, la serie no está defi nida para valores negativos de x debido a la presencia de $x^{\frac{1}{2}}$. Para $r_2 = 0$, una segunda solución es

$$y_2(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}x^n, \quad |x| < \infty$$

En el intervalo $(0,\infty)$ la solución general es $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

Ejemplo Resuelva

$$xy'' + y = 0$$

Solución De $xP(x) = 0$, $x^2Q(x) = x$ y el hecho de que 0 y x son sus propias series de potencias centradas en 0, se concluye que $c_0 = 0$ y $b_0 = 0$, por tanto, de la ecuación (13) la ecuación indicial es $r(r-1) = 0$. Se debe comprobar que las dos relaciones de recurrencia correspondientes a las raíces indiciales $r_1 = 1$ y $r_2 = 0$ producen exactamente el mismo conjunto de coeficientes. En otras palabras, en este caso el método de Frobenius produce sólo una solución en serie

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}x^{n+1} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \cdots$$