Definición 1. *Una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes es una ecuación diferencial*

Clasificación según tipo Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo con su tipo, orden y linealidad

1. Si una ecuación sólo contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sóla variable independiente, entonces se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria**. Por ejemplo

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0, \quad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias

2. Una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes, respecto de dos o más variables independientes, se llama **ecuación en derivadas parciales**. Por ejemplo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Clasificación según orden El **orden de una ecuación diferencial** (ordinaria o en derivadas parciales) es el de la derivada de mayor orden en la ecuación. Por ejemplo

$$\underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}_{segundo\ orden} + 5\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{primer\ orden}\right)^3 - 4y = e^x$$

es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

Clasificación según linealidad Se dice que una ecuación diferencial como la siguiente

$$F(x, y, y' ..., y^{(n)}) = 0$$

es lineal si F es lineal en $x, y, y' ..., y^{(n)}$. Esto quiere decir que una ecuación diferencial ordinaria, de orden n es lineal cuando la ecuación

$$F(x, y, y' ..., y^{(n)}) = 0$$

es

$$a_n(x)\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + a_{n-1}(x)\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

En esta última ecuación, vemos las dos propiedades características de las ecuaciones diferenciales lineales:

a) La variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado; esto es, el exponente de todo término donde aparece y es 1.

b) Cada coeficiente sólo depende de x, que es la variable independiente. Las ecauciones

$$(y-x)\ dx + 4x\ dy = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x \quad y \quad y'' - 2y' + y = 0$$

son, a su vez ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de primero, segundo y tercer orden.

c) Una ecuación diferencial ordinaria, no lineal simplemente es aquella que no es lineal. Las funciones no lineales de la variable dependiente o de sus derivadas como por ejemplo $\operatorname{sen}(y)$ o $e^{y'}$ no pueden aparecer en una ecuación lineal. Por consiguiente,

$$\overbrace{(1-y)}^{\text{Término no lineal: El coeficiente depende de y}}y' + 2y = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \overbrace{\operatorname{sen}(y)}^{\text{Término no lineal: Función no lineal de y}} = 0 \quad y \quad \frac{d^4y}{dx^4} + \overbrace{y^2}^{\text{Término no lineal: Potencia distinta de 1}} = 0$$

son ecuaciones diferenciales no lineales de primero, segundo y cuarto orden, respectivamente

Definición 2. *Solución de una ecuación diferencial.*
*Cualquier función ϕ, definida en un intervalo I y que tiene al menos n derivadas continuas en I, las cuales cuando se sustituyen en una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden reducen la ecuación a una identidad, se dice que es una **solución** de la ecuación en el intervalo.*

Ejemplo Verifique que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada en el intervalo $(-\infty, \infty)$

1. $\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}; \quad y = \frac{1}{16}x^4$
2. $y'' - 2y' + y = 0; \quad y = xe^x$

Solución Una forma de verificar que la función dada en una solución, es ver, una vez que se ha sustituido, sa cada lado de la ecuación es el mismo para toda x en el intervalo

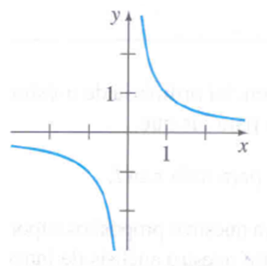
a) lado izquierdo: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{16}(4\ x^3) = \frac{1}{4}x^3$
lado derecho: $xy^{\frac{1}{2}} = x\left(\frac{1}{16}x^4\right)^{\frac{1}{2}} = x\left(\frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{4}x^3$
vemos que cada lado de la ecuación es el mismo para todo número real x. Observe que $y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}x^2$ es, por definición, la raíz cuadrada no negativa de $\frac{1}{16}x^4$

b) De las derivadas $y' = xe^x + e^x y\ y'' = xe^x + 2e^x$ tenemos que para todo número real x,
Lado izquierdo $y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + 2e^x) + xe^x = 0$
Lado derecho 0

En el primer ejemplo, observe también, que cada solución diferencial tiene la solución constante $y = 0, \quad -\infty < x < \infty$. Una solución de una ecuación diferencial que es igual a cero en un intervalo I se dice que es la solución trivial

Definición 3. *La gráfica de una solución de una ecuación diferencial ordinaria se llama* ***curva solución****. Puesto que ϕ es una función derivable, es continua en su intervalo de definición I. Puede haber diferencia entre la gráfica de la función ϕ y la gráfica de la solución ϕ. Es decir, el dominio de la función ϕ no necesita ser igual al intervalo de definición I (o dominio) de la solución ϕ.*

Ejemplo El dominio de $y = \frac{1}{x}$, considerado como una función, es el conjunto de todos los números reales x excepto 0. Cuando trazamos la gráfica de $y = \frac{1}{x}$, dibujamos los puntos en el plano XY correpondientes.

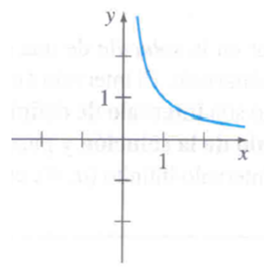


función $y = 1/x, x \neq 0$

La función racional $y = \frac{1}{x}$ es discontinua en $x = 0$, com se ve en la figura, en una vecindad del origen. La función $y = \frac{1}{x}$ no es derivable en $x = 0$, ya que el eje Y (cuya ecuación es $x = 0$) es una asíntota vertical de la gráfica.
Ahora $y = \frac{1}{x}$ es también una solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden $xy' + y = 0$. Pero cuando decimos que $y = \frac{1}{x}$ es una solución de esta ecuación diferencial, significa que es una función definida en un intervalo I en el que es derivable y satisface la ecuación. En otras palabras, $y = \frac{1}{x}$ es una solución de la ED en cualquier intervalo que no contenga 0, tal como

$$(-3, -1), \quad \left(\frac{1}{2}, 10\right), \quad (-\infty, 0), \quad (0, \infty)$$

Porque las curvas solución definidas por $y = \frac{1}{x}$ para $-3 < x < -1$ y $\frac{1}{2} < x < 10$ son simplemente tramos, o partes, de las curvas solución definidas por $y = \frac{1}{x}$ para $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$, respectivamente, esto hace que tenga sentido tomar el intervalo I tan grande como sea posible. Así tomamos I ya sea como $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$. La curva solución es $(0, \infty)$ es como se ve en la figura



solución $y = 1/x$, $(0, \infty)$

Solución explícita Una solución en la cual la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente y las constantes se dice que es una **solución explícita**. Consideraremos una solución explícita como una fórmula explícita $y = \phi(x)$ que podamos manejar, evaluar y derivar usando las reglas usuales.

Solución implícita Se dice que una relación $G(x, y) = 0$ es una **solución implícita** de una ecuación diferencial ordinaria en un intervalo I, suponiendo que existe al menos una función ϕ que satisface la relación así como la ecuación diferencial en I.

Ejemplo La relación $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

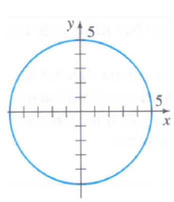
en el intervalo abierto $(-5, 5)$. Derivando implícitamente obtenemos

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dy}y^2 = \frac{d}{dx}25 \quad o \quad 2x + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0$$

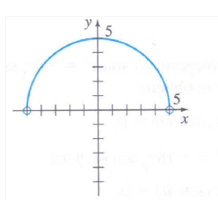
Resolviendo la última ecuación para $\dfrac{dy}{dx}$ se obtiene $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$. Además, resolviendo $x^2 + y^2 = 25$ para y en términos de x se obtiene $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Las dos funciones

$$\phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad y \quad \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$$

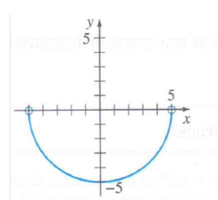
satisfacen la relación (que es $x^2 + \phi_1^2 = 25$ y $x^2 + \phi_2^2 = 25$) y son las soluciones explícitas definidas en el intervalo $(-5, 5)$. Las curvas solución dadas en las figuras



solución implícita
$x^2 + y^2 = 25$



solución explícita
$y_1 = \sqrt{25 - x^2}$, $-5 < x < 5$



solución explícita
$y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$, $-5 < x < 5$