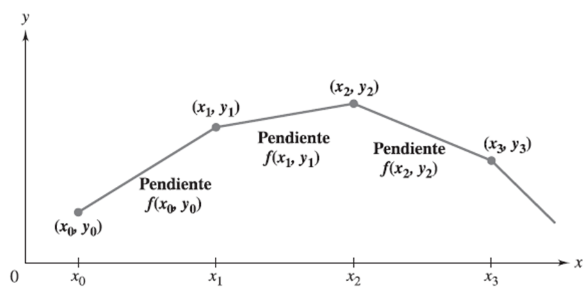
Métodos Geométricos para analizar soluciones de EDO

La idea básica detrás de los campos direccionales se puede hallar aproximaciones numéricas a soluciones de ecuaciones diferenciales.

Método de Euler El método de Euler (o método de la recta tangente) es un procedimiento que permite construir aproximaciones a las soluciones de un problema con valor inicial, para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

El método se ilustra en la figura.



Partiendo del punto inicial (x_0, y_0), seguimos la línea recta con pendiente $f(x_0, y_0)$, la recta tangente, por una cierta distancia hasta el punto (x_1, y_1). Luego cambiamos la pendiente por el valor $f(x_1, y_1)$ y seguimos esta recta hasta (x_2, y_2). De es ta forma, construimos aproximaciones poligonales (líneas quebradas) de la solución. Al tomar espacios cada vez menores entre los puntos (con lo cual utilizamos más puntos), es de esperar que lleguemos a la solución real.
Usamos esta recta tangente para aproximar $f(x)$ y vemos que para el punto $x_1 = x_0 + h$

$$\phi(x_1) \approx y_1 = y_0 + h\ f(x_0, y_0)$$

Ahora partimos del punto (x_1, y_1) para construir la recta con pendiente dada por el campo de direcciones en el punto (x_1, y_1); es decir, con pendiente igual a $f(x_1, y_1)$. Si seguimos esta recta

$$y = y_1 + (x - x_1)f(x_1, y_1)$$

al pasar de x_1 a $x_2 = x_1 + h$, obtenemos la aproximación

$$\phi(x_2) \approx y_2 = y_1 + h\ f(x_1, y_1)$$

Al repetir el proceso, obtenemos

$$\phi(x_3) \approx y_3 = y_2 + h\ f(x_2, y_2)$$

$$\phi(x_4) \approx y_4 = y_3 + h\ f(x_3, y_3)$$

etc.
Este sencillo procedimiento es el métedo de Euler y se puede resumir mediante la fórmula recursiva

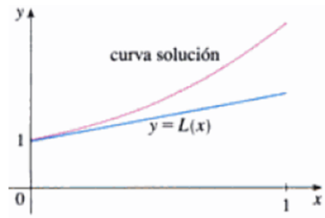
$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + h\ f(x_n, y_n), \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Ejemplo Considerémos el problema con valor inicial

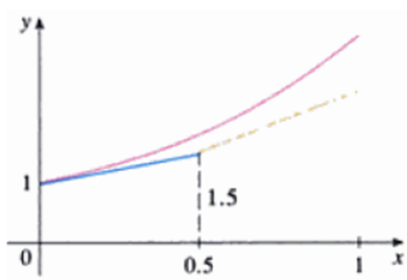
$$y' = x + y, \quad y(0) = 1$$

La ecuación diferencial dice que $y'(0) = 0 + 1 = 1$, así que la curva solución tiene pendiente 1 en el punto $(0, 1)$. Como una primera aproximación a la solución se podría usar la aproximación lineal $L(x) = x + 1$. En otras palabras, se podría usar la línea tangente en $(0, 1)$ como aproximación a la curva solución



Primera aproximación de Euler

La idea de Euler era mejorar esta aproximación procediendo sólo una corta distancia a lo largo de esta recta tangente y luego hacer una corrección a mitad de curso cambiando la dirección como indica el campo direccional

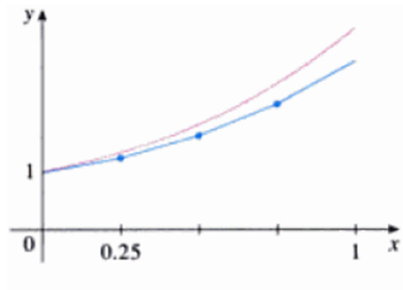


Aproximación de Euler con tamaño del paso de 0.5

En la figura se muestra lo que sucede si si se comienza a lo largo de la recta tangente pero se detiene cuando $x = 0{,}5$ (esta distancia horizontal recorrida se llama tamaño de paso.) Puesto que $L(0{,}5) = 1{,}5$, se tiene $y(0, 5) \approx 1{,}5$ y se tiene $(0{,}5, 1{,}5)$ como el punto de partida para un nuevo segmento de recta.
La ecuación diferencial indica que $y'(0{,}5) = 0{,}5 + 1{,}5 = 2$ de modo que se usa la función lineal

$$y = 1{,}5 + 2(x - 0{,}5) = 2x + 0{,}5$$

como una aproximación a la solución para $x > 0{,}5$.
Si se reduce el tamaño de paso de 0,5 a 0,25, se obtiene una mejor aproximación de Euler



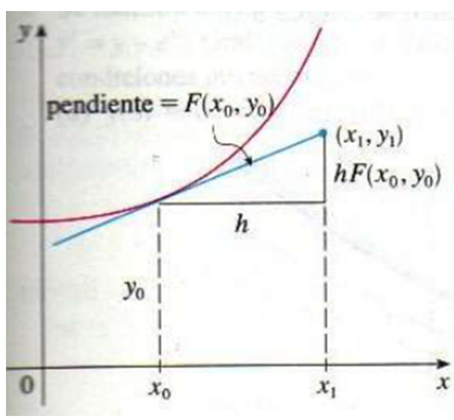
Aproximación de Euler con tamaño del paso de 0.25

En general, el método de Euler indica empezar en el punto dado por el valor inicial y proceder en la dirección indicada por el campo direccional. Deténgase después de un corto tiempo, examine la pendiente en la nueva ubicación y proceda en esta dirección. Mantenga la dirección de detención y de cambio de acuerdo con el campo direccional.
El método de Euler no produce la solución exacta para un problema de valor inicial, da aproximaciones.

Para el problema general con valor inicial de primer orden $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, el propósito es hallar valores aproximados para la solución en los números igualmente espaciados

$$x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h, ...$$

donde h es el tamaño del paso. La ecuación diferencial dice que la pendiente en (x_0, y_0) es $y' = F(x_0, y_0)$,



la figura muestra muestra que el valor aproximado de la solución cuando $x = x_1$ es

$$y_1 = y_0 + h\ F(x_0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + h\ F(x_1, y_1)$$

De manera similar

$$y_n = y_{n-1} + h\ F(x_{n-1}, y_{n-1})$$

en general.

Ejemplo Utilice el método de Euler con tamaño del paso $h = 0{,}1$ para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = x\sqrt{y}, \quad y(1) = 4$$

en los puntos $x = 1{,}1,\ 1,2,\ 1{,}3,\ 1{,}4,\ 1{,}5$

Solución En este caso, $x_0 = 1$, $y_0 = 4$, $h = 0{,}1$ y $f(x, y) = x\sqrt{y}$. Así la fórmula recursiva para y_n es

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + (0{,}1)x_n\sqrt{y_n}$$

Al sustituir $n = 0$, obtenemos

$$x_1 = x_0 + 0{,}1 = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$$

$$y_1 = y_0 + (0{,}1)x_0\sqrt{y_0} = 4 + (0{,}1)(1)\sqrt{4} = 4{,}1$$

Al sustituir $n = 1$, obtenemos

$$x_2 = x_1 + 0{,}1 = 1{,}1 + 0{,}1 = 1{,}2$$

$$y_2 = y_1 + (0{,}1)x_1\sqrt{y_1} = 4{,}2 + (0{,}1)(1{,}1)\sqrt{4{,}2} = 4{,}42543$$

Si continuamos de esta forma, obtenemos los resultados de la tabla. Como comparación, hemos incluido el valor exacto (hasta cinco cifras decimales) de la solución

$$\phi(x) = \frac{(x^2 + 7)^2}{16}$$

Como era de esperar, la aproximación se deteriora cuando x se aleja de 1.

TABLA 1.1 CÁLCULOS PARA $y' = x\sqrt{y}$, $y(1) = 4$

n	x_n	Método de Euler	Valor exacto
0	1	4	4
1	1.1	4.2	4.21276
2	1.2	4.42543	4.45210
3	1.3	4.67787	4.71976
4	1.4	4.95904	5.01760
5	1.5	5.27081	5.34766