Ejemplos de Ecuaciones

Ecuación de Airy En las ciencias físicas, la función Airy (o la función Airy del primer tipo) $Ai(x)$ es una función especial que lleva el nombre del astrónomo británico George Biddell Airy (1801–1892).

La función Ai (x) y la función relacionada Bi (x) son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial.

$$y'' - xy = 0$$

conocida como la ecuación de Airy o la ecuación de Stokes. Esta es la ecuación diferencial lineal de segundo orden más simple con un punto de inflexión (un punto donde el carácter de las soluciones cambia de oscilatorio a exponencial).

La función Airy es la solución a la ecuación de Schrödinger para una partícula confinada dentro de un pozo de potencial triangular y para una partícula en un campo de fuerza constante unidimensional. Por la misma razón, también sirve para proporcionar aproximaciones semiclásicas uniformes cerca de un punto de inflexión en la aproximación WKB, cuando el potencial puede aproximarse localmente por una función lineal de posición. La solución de pozo de potencial triangular es directamente relevante para la comprensión de muchos dispositivos semiconductores.

La función Airy también subyace a la forma de la intensidad cerca de una cáustica direccional óptica, como la del arco iris. Históricamente, este fue el problema matemático que llevó a Airy a desarrollar esta función especial.

Una función diferente que también lleva el nombre de Airy es importante en microscopía y astronomía; describe el patrón, debido a la difracción e interferencia, producido por una fuente puntual de luz (una que es mucho más pequeña que el límite de resolución de un microscopio o telescopio).

Solución de la ecuación diferencial de Airy Dada la ecuación diferencial

$$y'' - xy = 0$$

usamos el método de la serie de potencias y proponemos la solución $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Al sustituir en la ecuación diferencial se tiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

expandiendo el primer sumando

$$2c_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

recorriendo indices

$$2c_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)c_{n+3} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

de lo anterior $2c_2 = 0$ implican $c_2 = 0$. Por otro lado

$$(n+3)(n+2)c_{n+3} - c_n = 0 \;\Rightarrow\; c_{n+3} = \frac{c_n}{(n+3)(n+2)}$$

sustituimos $n = 0, 1, 2, ...$ y obtenemos

$$c_3 = \frac{c_0}{3\cdot 2} \qquad c_4 = \frac{c_1}{4\cdot 3} \qquad c_5 = \frac{c_2}{5\cdot 4} = 0 \qquad c_6 = \frac{c_3}{6\cdot 5} = \frac{4c_0}{6!}$$

$$c_7 = \frac{c_4}{7\cdot 6} = \frac{2\cdot 5c_1}{7!} \qquad c_8 = \frac{c_5}{8\cdot 7} = 0 \qquad c_9 = \frac{c_6}{9\cdot 8} = \frac{4\cdot 7c_0}{9!} \qquad c_{10} = \frac{c_7}{10\cdot 9} = \frac{2\cdot 5\cdot 8c_1}{10!}$$

Se tiene el patron

$$c_{3n+2} = 0, \quad c_{3n} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{(3n)!}, \quad c_{3n+1} = \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{(3n+1)!}$$

escribimos la solución

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots$$

$$y = c_0 + c_1x + \frac{1}{3!}c_0x^3 + \frac{2}{4!}c_1x^4 + \frac{4}{6!}c_0x^6 + \frac{2\cdot 5}{7!}c_1x^7 + \frac{4\cdot 7}{9!}c_0x^9 + \frac{2\cdot 5\cdot 8}{10!}c_1x^{10} + \cdots$$

$$y = c_0\left(1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4}{6!}x^6 + \frac{4\cdot 7}{9!}x^9 + \cdots\right) + c_1\left(x + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{2\cdot 5}{7!}x^7 + \frac{2\cdot 5\cdot 8}{10!}x^{10} + \cdots\right)$$

$$y = c_0\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{(3n)!}x^{3n} + c_1\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1}$$

Ecuación de Hermite Charles Hermite (1822-1901) fue un matemático francés que realizó investigaciones sobre teoría de números, formas cuadráticas, teoría de invariantes, polinomios ortogonales,

La ecuación de Hermite es nuestro primer ejemplo de una ecuación diferencial, que tiene una solución polinomial. Tenemos que determinar la elección correcta para los coeficientes (c_n).

Solución de la ecuación de Hermite Considere la ecuación diferencial

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

para esta ecuación proponemos la solución en serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Al sustituir en la ecuacón se tiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-2} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda c_n x^{n-2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nc_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda c_n x^{n-2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} - 2nc_n + \lambda c_n\right) x^{n} = 0$$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - 2nc_n + \lambda c_n = 0$$

Obtenemos la relación de recurrencia

$$c_{n+2} = \frac{(2n-\lambda)}{(n+1)(n+2)} c_n$$

tomando $n = 0, 1, 2, 3, ...$ se obtiene

$$c_2 = \frac{-\lambda}{2\cdot 1}c_0 \qquad c_4 = \frac{4-\lambda}{4\cdot 3}c_2 = \left(\frac{4-\lambda}{4\cdot 3}\frac{(-\lambda)}{2\cdot 1}c_0\right) = -\frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}c_0$$

$$c_3 = \frac{2-\lambda}{3\cdot 2}c_1 \qquad c_5 = \frac{6-\lambda}{5\cdot 4}c_3 = \left(\frac{6-\lambda}{5\cdot 4}\frac{(2-\lambda)}{3\cdot 2}c_1\right) = \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}c_1$$

la solución nos queda

$$y = c_0\left[1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6 - \cdots\right] + c_1\left[x + \frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5 + \cdots\right]$$

Ecuación de Legendre En matemáticas, en el análisis de ecuaciones diferenciales ordinarias, las funciones de Legendre son las soluciones de las ecuaciones diferenciales de Legendre:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

llamadas así en honor del matemático francés Adrien-Marie Legendre.

Estas ecuaciones se encuentran frecuentemente en Física. En particular, aparecen cuando se resuelve la ecuación de Helmholtz (un tipo de ecuación en derivadas parciales) en coordenadas esféricas mediante el método de separación de variables.
La ecuación diferencial de Legendre puede resolverse usando el método de serie de potencias.
Esta ecuación surge en muchos problemas de física, especialmente en problemas de valor de límite en esferas

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

donde α es una constante.

Solución de la ecuación de Legendre Escribimos la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

donde

$$p(x) = \frac{-2x}{1-x^2}, \qquad q(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}$$

es claro que tanto $p(x)$ como $q(x)$ son analíticas en el origen y el radio de convergencia es $\rho = 1$. Proponemos entonces la solución

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

al sustituir en la ecuación

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

obtenemos

$$(1 - x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

expandiendo

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

simplificando

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n} - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(\alpha+1)c_n x^n = 0$$

recorriendo las series

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2} x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nc_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(\alpha+1)c_n x^n = 0$$

simplificando

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - 2nc_n + \alpha(\alpha+1)c_n]x^n = 0$$

se tiene entonces

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - 2nc_n + \alpha(\alpha+1)c_n]x^n = 0 \;\Rightarrow\; c_{n+2} = -\frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+2)(n+1)}c_n$$

sustituyendo $n = 1, 2, 3, ...$

$$c_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{2\cdot 1}c_0$$

$$c_3 = -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3\cdot 2}c_1$$

$$c_4 = -\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{4\cdot 3}c_2 = -\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{4\cdot 3}\left(-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2\cdot 1}c_0\right) = \frac{(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}c_0$$

$$c_5 = -\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)}{5\cdot 4}c_{32} = -\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)}{5\cdot 4}\left(-\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3\cdot 2}c_1\right) = \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}c_1$$

se tiene el patron

$$c_{2n} = (-1)^n\frac{(\alpha+2n-1)(\alpha+2n-3)\cdots(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2n+2)}{(2n)!}c_0$$

$$c_{2n+1} = (-1)^n\frac{(\alpha+2n)(\alpha+2n-2)\cdots(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2n+1)}{(2n+1)!}c_1$$

escribimos la solución

$$y = c_0y_1 + c_1y_2$$

donde

$$y_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\alpha+2n-1)(\alpha+2n-3)\cdots(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2n+2)}{(2n)!}x^{2n}$$

y

$$y_2 = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\alpha+2n)(\alpha+2n-2)\cdots(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Ecuación de Laguerre Los polinomios de Laguerre son una familia de polinomios ortogonales, llamados así en honor de Edmond Laguerre, surgen al examinar las soluciones a la ecuación diferencial:

$$xy'' + (1-x)y' + my = 0, \quad m \in \mathbb{Z}^+$$

Edmond Nicolas Laguerre (9 de abril de 1834, Bar-le-Duc - 14 de agosto de 1886), fue un matemático francés, conocido principalmente por la introducción de los polinomios que llevan su nombre.

Comenzó sus estudios en la École Polytechnique (Promoción X1853). Efectuó una carrera militar de 1854 a 1864 como oficial de artillería. Luego, fue tutor de la École polytechnique.
Gracias al apoyo de Joseph Bertrand, obtiene la cátedra de físico matemático en el Colegio de Francia, en 1883, y se convierte en miembro de la Academia de Ciencias en 1885.
Laguerre publicó más de 140 artículos sobre los diferentes aspectos de la geometría y del análisis. Sus obras completas fueron publicadas en diez volúmenes entre 1898 y 1905 por encargo de Charles Hermite, Henri Poincaré y Eugène Rouché.

Solución de la ecuación de Laguerre Escribimos la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$$p(x) = 1 - x, \qquad q(x) = mx$$

es claro que tanto $p(x)$ como $q(x)$ son analíticas en el origen. Proponemos entonces la solución

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

al sustituir en la ecuación

$$xy'' + (1-x)y' + my = 0$$

obtenemos

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} + m\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

expandiendo

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} - x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} + m\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

simplificando

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} + m\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)+(n+r)]c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)-m]c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)-m]c_n x^{n+r} = 0$$

recorriendo los índices

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty}[(n+r-1)-m]c_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

tomando el primer elemento de la primer suma

$$r^2 c_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r)^2 c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty}[(n+r-1)-m]c_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

agrupando

$$r^2 c_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)^2 c_n - [(n+r-1)-m]c_{n-1}]x^{n+r-1} = 0$$

se tiene entonces

$$r^2 c_0 x^{r-1} = 0 \; r = 0$$

$$(n+r)^2 c_n - [(n+r-1)-m]c_{n-1} = 0 \;\Rightarrow\; c_n = \frac{n+r-1-m}{(n+r)^2}c_{n-1}$$

con $r = 0$ se tiene

$$c_n = \frac{n-1-m}{(n)^2}c_{n-1}$$

sustituyendo $n = 1, 2, 3, ...$ tenemos

$$c_1 = \frac{-m}{1^2}c_0 = \frac{-m}{(1!)^2}c_0$$

$$c_2 = \frac{1-m}{2^2}c_1 = \frac{1-m}{2}\left(\frac{-m}{(1!)^2}c_0\right) = (-1)^2\frac{m(m-1)}{(2!)^2}c_0$$

$$c_3 = \frac{2-m}{3^2}c_2 = \frac{2-m}{3^2}\left((-1)^2\frac{m(m-1)}{(2!)^2}c_0\right) = (-1)^3\frac{(m-2)m(m-1)}{3^2(2!)^2}c_0 = (-1)^3\frac{(m-2)m(m-1)}{(3!)^2}c_0$$

se observa el patron

$$c_n = (-1)^n\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(n!)^2}c_0$$

por tanto la solución de la ecuación de Laguerre es:

$$\begin{aligned} y &= c_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(n!)^2}x^n \\ &= c_0\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(m-n)!}{(m-n)!(n!)^2}x^n \\ &= c_0\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\frac{m!}{(m-n)!(n!)^2}x^n \end{aligned}$$

Ecuación de Chevyshev La ecuación de Chebyshev es la ecuación diferencial lineal de segundo orden.

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$$

donde α es una constante real (o compleja). La ecuación lleva el nombre del matemático ruso Pafnuty Chebyshev. Es conocido por su trabajo en el área de la probabilidad y estadística.

Solución a la ecuación de Chebyshev La ecuación de Chebyshev

$$(1-x^2)y''-xy'+\alpha^2y=0$$

en el punto $x=0$ tiene un punto ordinario, por lo que se tiene una solución de la forma

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

sustituyendo en la ecuación

$$(1-x^2)y''-xy'+\alpha^2y=0$$

obtenemos

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}-x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

expandiendp

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}-x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}-x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

simplificando

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n}-\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n}+\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

recorriendo indices en el primer sumando

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^{n}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n}-\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n}+\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

extraemos los primeros términos del primer sumando

$$(2)(1)c_2x^0+(3)(2)c_3x+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^{n}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n}-\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n}+\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

ahora extraemos el primer sumando del término en rojo

$$(2)(1)c_2x^0+(3)(2)c_3x+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^{n}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n}-(1)c_1x-\sum_{n=2}^{\infty}nc_nx^{n}+\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

finalmente extraemos los primeros términos del último sumando

$$(2)(1)c_2x^0+(3)(2)c_3x+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^{n}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n}-(1)c_1x-\sum_{n=2}^{\infty}nc_nx^{n}$$

$$+\alpha^2c_0x^0+\alpha^2c_1x+\sum_{n=2}^{\infty}c_nx^n=0$$

agrupando

$$2c_2+\alpha^2c_0+(6c_3-c_1+\alpha^2c_1)+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2}-n(n-1)c_n-nc_n-\alpha^2c_n]x^n=0$$

tenemos que

$$2c_2+\alpha^2c_0=0 \;\Rightarrow\; c_2=-\frac{\alpha^2}{2}c_0$$

$$6c_3-c_1+\alpha^2c_1=0 \;\Rightarrow\; c_3=\frac{1-\alpha^2}{6}c_1$$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}-n(n-1)c_n-nc_n-\alpha^2c_n \;\Rightarrow\; c_{n+2}=\frac{n^2-\alpha^2}{(n+1)(n+2)}c_n$$

sustituyendo $n=0,1,2,...$ se tiene

$$c_2=-\frac{\alpha^2}{2}c_0$$

$$c_3=\frac{1-\alpha^2}{3!}c_1$$

$$c_4=\frac{2^2-\alpha^2}{4\cdot 3}c_2=\frac{2^2-\alpha^2}{4\cdot 3}\left(-\frac{\alpha^2}{2}c_0\right)=\frac{(2^2-\alpha^2)(-\alpha^2)}{4!}c_0$$

$$c_5=\frac{3^2-\alpha^2}{5\cdot 4}c_3=\frac{3^2-\alpha^2}{5\cdot 4}\left(\frac{1-\alpha^2}{3!}c_1\right)=\frac{(3^2-\alpha^2)(1-\alpha^2)}{5!}c_1$$

$$c_6=\frac{4^2-\alpha^2}{6\cdot 5}c_4=\frac{4^2-\alpha^2}{6\cdot 5}\left(\frac{(2^2-\alpha^2)(-\alpha^2)}{4!}c_0\right)=\frac{(4^2-\alpha^2)(2^2-\alpha^2)(-\alpha^2)}{6!}c_0$$

se observa el patron

$$c_{2n}=\frac{[(2n-2)^2-\alpha^2][(2n-4)^2-\alpha^2]\cdots(2^2-\alpha^2)(-\alpha^2)}{(2n)!}c_0$$

$$c_{2n+1}=\frac{[(2n-1)^2-\alpha^2][(2n-3)^2-\alpha^2]\cdots(3^2-\alpha^2)(1-\alpha^2)}{(2n+1)!}c_1$$

y la solución de la ecuación de Chebyshev es:

$$y=c_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(2n-2)^2-\alpha^2][(2n-4)^2-\alpha^2]\cdots(2^2-\alpha^2)(-\alpha^2)}{(2n)!}\right)x^{2n}+$$

$$c_1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(2n-1)^2-\alpha^2][(2n-3)^2-\alpha^2]\cdots(3^2-\alpha^2)(1-\alpha^2)}{(2n+1)!}\right)x^{2n+1}$$

Ecuación Hipergeométrica de Gauss A continuación resolvemos la ecuación diferencial de segundo orden llamada ecuación diferencial hipergeométrica utilizando el método de Frobenius.
La solución de la ecuación diferencial hipergeométrica es muy importante. Por ejemplo, se puede mostrar que la ecuación diferencial de Legendre es un caso especial de la ecuación diferencial hipergeométrica. Por lo tanto, al resolver la ecuación diferencial hipergeométrica, uno puede comparar directamente sus soluciones para obtener las soluciones de la ecuación diferencial de Legendre, después de realizar las sustituciones necesarias. Para más detalles, verifique la ecuación diferencial hipergeométrica.

La ecuación hipergeométrica de Gauss es:

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

la cual se escribe en forma

$$y'' + \frac{[\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y'}{x(1-x)} - \frac{\alpha\beta y}{x(1-x)}y = 0$$

en este caso

$$p(x) = [\gamma - (\alpha+\beta+1)x, \quad q(x) = -\alpha\beta$$

Se tiene que $x = 0$, $x = 1$ son puntos singulares. Frobenius propone la solución

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

sustituyendo en la ecuación

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

obtenemos

$$x(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} - \alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

expandiendo

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} - x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + \gamma\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$$

$$-(\alpha+\beta+1)x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} - \alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

simplificando

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r}+\gamma\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$$

$$-(\alpha+\beta+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r}-\alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=0$$

recorriendo indices

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)(n+r-2)c_{n-1}x^{n+r-1}+\gamma\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$$

$$-(\alpha+\beta+1)\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1}x^{n+r-1}-\alpha\beta\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{n+r-1}=0$$

extraemos el primer término de los sumando primero y tercero

$$r(r-1)c_0x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)(n+r-2)c_{n-1}x^{n+r-1}+\gamma rc_0x^{r-1}+\gamma\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$$

$$-(\alpha+\beta+1)\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1}x^{n+r-1}-\alpha\beta\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{n+r-1}=0$$

agrupando

$$[r(r-1)+\gamma r]c_0x^{r-1}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)c_n-(n+r-1)(n+r-2)c_{n-1}+\gamma(n+r)c_n-(\alpha+\beta+1)(n+r-1)c_{n-1}-\alpha\beta c_{n-1}]x^{n+r-1}=0$$

de aquí

$$[r(r-1)+\gamma r]c_0=0\ \Rightarrow\ r(r-1)+\gamma r=0\ \Rightarrow\ r(r-1+\gamma)=0\ \Rightarrow\ r=0,\quad r=1-\gamma$$

también

$$(n+r)(n+r-1)c_n-(n+r-1)(n+r-2)c_{n-1}+\gamma(n+r)c_n-(\alpha+\beta+1)(n+r-1)c_{n-1}-\alpha\beta c_{n-1}=0$$

$$\Rightarrow\ c_n=\frac{(n+r-1)(n+r-2)+(\alpha+\beta+1)(n+r-1)+\alpha\beta}{(n+r)(n+r-1)+\gamma(n+r)}c_{n-1}$$

$$\Rightarrow\ c_n=\frac{(n+r-1)(n+r+\alpha+\beta-1)+\alpha\beta}{(n+r)(n+r+\gamma-1)}c_{n-1}$$

$$\Rightarrow\ c_n=\frac{(n+r-1)(n+r+\alpha-1)+(n+r-1)\beta+\alpha\beta}{(n+r)(n+r+\gamma-1)}c_{n-1}$$

$$\Rightarrow\ c_n=\frac{(n+r-1)(n+r+\alpha-1)+(n+r-1+\alpha)\beta}{(n+r)(n+r+\gamma-1)}c_{n-1}$$

$$\Rightarrow \; c_n = \frac{(n+r+\alpha-1)(n+r-1+\beta)}{(n+r)(n+r+\gamma-1)} c_{n-1}$$

tomando $n = 1, 2, 3, ...$ tenemos

$$c_1 = \frac{(r+\alpha)(r+\beta)}{(1+r)(r+\gamma)} c_0$$

$$c_2 = \frac{(r+\alpha+1)(r+\beta+1)}{(2+r)(r+\gamma+1)} c_1 = \frac{(r+\alpha+1)(r+\beta+1)}{(2+r)(r+\gamma+1)} \left(\frac{(r+\alpha)(r+\beta)}{(1+r)(r+\gamma)} c_0 \right)$$

$$c_3 = \frac{(r+\alpha+2)(r+\beta+2)}{(3+r)(r+\gamma+2)} c_2 = \left(\frac{(r+\alpha+2)(r+\beta+2)}{(3+r)(r+\gamma+2)} \right) \frac{(r+\alpha+1)(r+\beta+1)}{(2+r)(r+\gamma+1)} \left(\frac{(r+\alpha)(r+\beta)}{(1+r)(r+\gamma)} c_0 \right)$$

Una forma de escribir las expresiones anteriores es usando el símbolo de Pochhamer, el cual se define

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$$

donde $(\alpha)_0 = 1$ y n es un entero positivo. De esta manera tenemos que

$$c_1 = \frac{(r+\alpha)(r+\beta)}{(1+r)(r+\gamma)} c_0$$

$$c_2 = \frac{(r+\alpha)_2(r+\beta)_2}{(1+r)_2(r+\gamma)_2} c_0$$

$$c_3 = \frac{(r+\alpha)_3(r+\beta)_3}{(1+r)_3(r+\gamma)_3} c_0$$

y en general

$$c_n = \frac{(r+\alpha)_n(r+\beta)_n}{(1+r)_n(r+\gamma)_n} c_0$$

y la solución de la ecuación hipergeométrica de Gauss es

$$y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} = \frac{(r+\alpha)_n(r+\beta)_n}{(1+r)_n(r+\gamma)_n} x^{n+r}$$