Matriz fundamental y su solución

Los vectores solución de un sistema lineal homogéneo de $n \times n$

$$x' = Ax \tag{1}$$

pueden utilizarse para construir una matriz cuadrada $X = \Phi(t)$ que satisface la ecuación diferencial matricial

$$X' = AX$$

asociada con la ecuación (1). Supóngase que $x : 1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ son n soluciones linealmente independientes de la ecuación (1). Así, la matriz de $n \times n$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \tag{2}$$

que tiene estos vectores solución, como sus vectores columna, se llama **matriz fundamental** del sistema dado en (1).

Ejemplo Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} x \tag{3}$$

Solución En este caso el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) + 2 + 12 - 8(2-\lambda) + (1-\lambda) - 3(1+\lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2) \end{aligned}$$

De modo que los valores característicos de A son $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -2$.

a) $\lambda_1 = 1$. Se busca un vector v, diferente de cero, tal que

$$(A - \lambda_1 I)v = 0 \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} 1-1 & -1 & 4 \\ 3 & 2-1 & -1 \\ 2 & 1 & -1-1 \end{pmatrix} v = 0 \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} v = 0$$

$$\begin{aligned} -v_2 + 4v_3 &= 0 \\ \Rightarrow \quad 3v_1 + v_2 - v_3 &= 0 \\ 2v_1 + v_2 - 2v_3 &= 0 \end{aligned}$$

al despejar v_1, y v_2 en términos de v_3 en las primeras dos ecuaciones, se obtiene $v_1 = {}^{-}v_3$ y $v_2 = 4v_3$. Por lo tanto, cualquier vector

$$v = c \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de A con valor característico igual a 1. P o r lo tanto,

$$ce^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es una solución de la ecuación diferencial para cualquier constante c. Para simplificar, se toma

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $\lambda_2 = 3$. Se busca un vector v, diferente de cero, tal que

$$(A - \lambda_2 I)v = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1-3 & -1 & 4 \\ 3 & 2-3 & -1 \\ 2 & 1 & -1-3 \end{pmatrix} v = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} v = 0$$

$$\begin{aligned} -2v_1 - v_2 + 4v_3 &= 0 \\ \Rightarrow \quad 3v_1 - v_2 - v_3 &= 0 \\ 2v_1 + v_2 - 4v_3 &= 0 \end{aligned}$$

al despejar v_1, y v_2 en términos de v_3 en las primeras dos ecuaciones, se obtiene $v_1 = v_3$ y $v_2 = 2v_3$. Por lo tanto, cualquier vector

$$v = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de A con valor característico igual a 3. Por lo tanto,

$$ce^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es una segunda solución de la ecuación diferencial para cualquier constante c. Para simplificar, se toma

$$x_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $\lambda_3 = -2$. Se busca un vector v, diferente de cero, tal que

$$(A-\lambda_1 I)v = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1-(-2) & -1 & 4 \\ 3 & 2-(-2) & -1 \\ 2 & 1 & -1-(-2) \end{pmatrix} v = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = 0$$

$$\begin{aligned} & 3v_1 - v_2 + 4v_3 = 0 \\ \Rightarrow\; & 3v_1 + 4v_2 - v_3 = 0 \\ & 2v_1 + v_2 + v_3 = 0 \end{aligned}$$

al despejar v_1, y v_2 en términos de v_3 en las primeras dos ecuaciones, se obtiene $v_1 = {}^{-}v_3$ y $v_2 = v_3$. Por lo tanto, cualquier vector

$$v = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de A con valor característico igual a -2. Por lo tanto,

$$ce^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es una tercera solución de la ecuación diferencial para cualquier constante c. Para simplificar, se toma

$$x_3(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las tres soluciones son linealmente independientes, ya que los valores característicos de A son diferentes. Por lo tanto, toda solución x(t) debe ser de la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-3t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} - c_3 e^{-2t} \\ 4c_1 e^{t} + 2c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \\ c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$X(t) = \begin{pmatrix} -e^{t} & e^{3t} & -e^{-2t} \\ 4e^{t} & 2e^{3t} & e^{-2t} \\ e^{t} & e^{3t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental de soluciones de (3)

Teorema 1. *Sea $X(t)$ una matriz fundamental de la ecuación $x' = Ax$. Entonces*

$$e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$$

En otras palabras, el producto de cualquier matriz fundamental de soluciones de (1) *y su inversa en* $t = 0$ *debe dar* e^{At}.

Primero se dará un criterio sencillo para determinar si una función con valores matriciales es una matriz fundamental de soluciones de (1). Después se usará ese criterio para mostrar que e e^{At} es una matriz fundamental de soluciones de (1). Por último, se establecerá la relación que existe entre cualesquiera dos matrices fundamentales de soluciones de (1).

Lema 1. *Una matriz $X(t)$ es una matriz fundamental de soluciones de (1) si y sólo si $X'(t) = AX(t)$ y $\det X(0) \neq 0$. (La derivada de una función con valores matriciales X(t) es la matriz cuyos elementos son las derivadas de los elementos correspondientes de $X(t)$.)*

Demostración. Denotése por $x_1(t), ..., x_n(t)$ de las n columnas de $X(t)$. Obsérvese que

$$X'(t) = (x_1'(t), ..., x_n'(t))$$

y

$$AX(t) = (Ax_1'(t), ..., Ax_n'(t))$$

Por lo tanto, las n ecuaciones vectoriales $x_1'(t) = A(x_1, ..., x_n(t)) = Ax_n(t)$ son equivalentes a la ecuación m atricial $X'(t) = AX(t)$. Más aún, n soluciones $x_1, ..., x_n(t)$ son linealmente independientes si y sólo si $x_1(0), ..., x_n(0)$ son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$. Los vectores, a su vez, son linealmente independientes si y sólo si $\det X(0) \neq 0$. Por lo tanto, $X(t)$ es una matriz fundamental de soluciones de (1) si y sólo si, $X(t) = AX(t)$ y $\det X(O) \neq 0$. □

Lema 2. *La función con valores matriciales*

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + ...$$

es una matriz fundamental de soluciones de (1.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}
(e^{At})' &= (I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + ...)' \\
&= A + \frac{t}{1!}A^2 + \frac{t}{2!}A^3 + \cdots \\
&= A\left(I_n + tA + \frac{t}{2!}A^2 + \cdots\right) \\
&= Ae^{ta}
\end{aligned}$$

Por lo tanto e^{At} es slolución de la ecuación diferencial matricial $x'(t) = Ax(t)$. Más aun, su determinante en $t = 0$ es igual a 1, ya que $e^{A0} = 1$. Por lo tanto según el lema 1, e^{At} es una matriz fundamental de soluciones de (1) □

Lema 3. *Sean $X(t)$ y $Y(t)$ dos matrices fundamentales de soluciones de (1). Entonces, existe una matriz constante C, tal que*

$$Y(t) = X(t)C$$

Demostración. Por definición, las columnas $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ de $X(t)$ e $y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)$ de $Y(t)$ son conjuntos linealmente independientes de soluciones de (1). En particular, por lo tanto, cualquier columna de $Y(t)$ puede escribirse como combinación lineal de las columnas de $X(t)$; es decir, existen constantes $c_1^j, ..., c_n^j$ tales que

$$y^j(t) = c_1^j x_1(t) + c_2^j x_2(t) + ... + c_n^j x_n(t), \quad j = 1, 2, ..., n$$

Sea C la matriz $C^1, C^2, ..., C^n$ donde

$$C^j = \begin{pmatrix} C_1^j \\ \vdots C_n^j \end{pmatrix}$$

Entonces las n ecuaciones son equivalentes a la ecuación matricial $Y(t) = X(t)C$. □

Vamos ahora a demostrar el teorema

Demostración. Sea $X(t)$ una matriz fundamental de soluciones de (1). Entonces, por los lemas 2 y 3, existe una matriz constante C tal que

$$e^{At} = X(t)C$$

Tomando $t = 0$ en la ecuación anterior se obtiene $1 = X(0)C$, lo cual implica que $C = X^{-1}(0)$. Por lo tanto,

$$e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$$

□

Ejemplo Encontrar e^{At} si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución El primer paso consiste en encontrar 3 soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} x$$

Para tal fin se calcula

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)$$

con lo que se encuentra que A tiene tres valores característicos $\lambda = 1$, $\lambda = 3$ y $\lambda = 5$.

a) $\lambda = 1$: Se tiene que

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de A con valor característico uno. Por lo tanto,

$$x_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una solución de $x' = Ax$.

b) $\lambda = 3$: Se busca una solución diferente de cero de la ecuación

$$(A - \lambda 3I)v = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto implica que $v_3 = 0$ y $v_2 = v_1$. Por lo tanto,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de A con valor característico tres. Por lo tanto,

$$x_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una segunda solución de $x' = Ax$.

c) $\lambda = 5$: Se busca una solución diferente de cero de la ecuación

$$(A - \lambda 5I)v = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto implica que $v_2 = v_3$ y $v_1 = \dfrac{v_3}{2}$. Por lo tanto,

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de A con valor característico cinco. Por lo tanto,

$$x_3 = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es una tercera solución de $x' = Ax$.

Las tres soluciones son linealmente independientes. Por lo tanto,

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} & e^{5t} \\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 0 & 0 & 2e^{5t} \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental de soluciones. Ahora bien se calcula

$$X^{-1}(0)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$e^{\begin{pmatrix}1&1&1\\0&3&2\\0&0&5\end{pmatrix}t}=\begin{pmatrix}e^{t}&e^{3t}&e^{5t}\\0&2e^{3t}&2e^{5t}\\0&0&2e^{5t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{t}&-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{3t}&-\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{5t}\\0&e^{3t}&-e^{3t}+e^{5t}\\0&0&e^{5t}\end{pmatrix}$$