El método de serie de Potencias

El **método de series de potencias** para resolver ecuaciones diferenciales consiste en sustituir la serie de potencias

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{1}$$

en la ecuación diferencial, y luego se determina el valor de los coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots$ para que la serie de potencias satisfaga la ecuación diferencial. Este método se asemeja al de los coeficientes indeterminados, pero aquí se tiene de alguna manera una infinidad de coeficientes por determinar. El método no siempre funciona, pero cuando lo hace se obtiene una solución representada por una serie infinita, en contraste con las soluciones de forma cerrada dadas por los métodos descritos anteriormente.

Ejemplo Resuélvase la ecuación

$$y' + 2y = 0$$

Solución Sustituyendo las series

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad y \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \tag{2}$$

Para comparar aquí los coeficientes se necesita que el término general de cada suma sea uno que contenga x^n. Lograrlo requiere un corrimiento del índice en la primera suma. Para ver cómo lograr esto, nótese que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n$$

Así, es posible reemplazar n con $n+1$ si, al mismo tiempo, se inicia contando desde el punto anterior; esto es, desde $n+0$ en lugar de $n=1$. Éste es un corrimiento de $+1$ en el índice de suma. El resultado de calcularlo en la ecuación (2) es la identidad

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

que es

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) c_{n+1} + 2c_n] x^n = 0$$

Si esta ecuación se cumple en algún intervalo, entonces se concluye por el principio de identidad que $(n+1)c_{n+1} + 2c_n = 0$ para toda $n \geq 0$; consecuentemente

$$c_{n+1} = -\frac{2c_n}{n+1} \tag{3}$$

para toda $n \geq 0$. La ecuación (3) es una **relación recursiva** de donde se pueden calcular sucesivamente $c_1, c_2, c_3, \ldots$ en términos de c_0; el último valor será la constante arbitraria que se esperaba encontrar como solución general de la ecuación diferencial de primer orden.
Con $n = 0$, la ecuación (3) obtiene

$$c_1 = -\frac{2c_0}{1}$$

Con $n = 1$, la ecuación (3) obtiene

$$c_1 = -\frac{2c_1}{2} = \frac{2^2 c_0}{1 \cdot 2} = \frac{2^2 c_0}{2!}$$

Con $n = 2$, la ecuación (3) obtiene

$$c_3 = -\frac{2c_2}{3} = -\frac{2^3 c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{2^3 c_0}{3!}$$

Debe estar claro ahora que después de n pasos se obtendrá

$$c_n = (-1)^n \frac{2^n c_0}{n!}, \quad n \geq 1$$

En consecuencia, la solución toma la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n c_0}{n!} x^n = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = c_0 e^{-2x}$$

En el último paso se ha utilizado la conocida serie exponencial de la ecuación e^x para identificar la solución de la serie de potencias como la misma solución $y(x) = c_0 e^{-2x}$ que se pudo haber obtenido con el método de separación de variables.

Ejemplo Encontrar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$y'' - 2xy' - 2y = 0 \tag{4}$$

Se tratará de hallar dos soluciones polinomiales de (4). Ahora bien, no es evidente de antemano cuál deba ser el grado de las soluciones polinomiales de (4). Por ello proponemos

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Derivando

$$y'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

volviendo a derivar

$$y''(x) = 2c_2 + 6c_3 x + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

Donde $y(x)$ es solución de (4) si

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \tag{5}$$

El paso siguiente es escribir los términos de la primera sumatoria en (5) de modo que el exponente del término general sea n y no $n-2$. Esto se hace sumando 2 a las n en la sumatoria, y restando 2 al límite inferior, es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n$$

(Esto se puede com probar escribiendo los primeros términos de cada una de las dos sumatorias. Obsérvese que la contribución de esta suma desde $n=-2$ y $n=-1$ es cero, ya que el factor $(n+2),(n+1)$ es igual a cero en ambos casos. Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n$$

Por lo tanto, (5) puede escribirse en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \tag{6}$$

Igualando a cero la suma de los coeficientes de las potencias iguales de x en (6) se obtiene

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - 2nc_n - 2c_n = 0$$

de modo que

$$c_{n+2} = \frac{2(n+1)c_n}{(n+2)(n+1)} = \frac{2c_n}{n+2} \tag{7}$$

La ecuación (7) es una fórmula de recurrencia para los coeficientes $c_0, c_1, c_2, c_3, ...$ El coeficiente c_n determina al coeficiente c_{n+2}. Así pues

Si $n=0$ se tiene

$$c_2 = \frac{2c_0}{2} = c_0$$

Si $n=1$ se tiene

$$c_3 = \frac{4c_1}{6} = \frac{2c_1}{3}$$

Si $n=2$ se tiene

$$c_4 = \frac{2c_2}{4} = \frac{c_0}{2}$$

Si $n=3$ se tiene

$$c_5 = \frac{2c_3}{5} = \frac{2}{5}\frac{2c_1}{3} = \frac{4}{15}c_1$$

y así sucesivamente. Por lo tanto, todos los coeficientes quedan determinados de manera única, una vez que se asignen valores para c_0 y c_1. Los valores de c_0 y c_1, son completamente arbitrarios. Sin embargo, eso era de esperar, ya que si

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2(x) + \cdots$$

entonces los valores de y y y ' en $x = 0$ son c_0 y c_1, respectivamente. Así pues, los coeficientes c_0 y c_1 serán arbitrarios hasta el momento en que se especifiquen condiciones iniciales para y.
Para encontrar dos soluciones de (4), se eligen dos valores diferentes para c_0 y c_1 . Las elecciones más sencillas son

a) $c_0 = 1$ y $c_1 = 0$

b) $c_0 = 0$ y $c_1 = 1$

En este caso todos los coeficientes impares $c_1, c_3, c_5, ...$ son iguales a cero, ya que $c_3 = \frac{2c_1}{3}$, $c_5 = \frac{2c_3}{5} = 0$, etcétera. Los coeficientes pares se determinan a partir de las relaciones

$$c_2 = c_0 = 1, \quad c_4 = \frac{2c_2}{4} = \frac{1}{2}, \quad c_6 = \frac{2c_4}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3}$$

y así sucesivamente. Procediendo por inducción, se encuentra que

$$c_{2n} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdots n} = \frac{1}{n!}$$

Por lo tanto

$$y_1(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots = e^{x^2}$$

es una solución de (4) En el caso (b) donde $c_0 = 0$ y $c_1 = 1$, todos los coeficientes pares son iguales a cero, y los coeficientes impares se determinan a partir de las relaciones

$$c_3 = \frac{2c_1}{3} = \frac{2}{3}, \quad c_5 = \frac{2c_3}{5} = \frac{2}{5}\frac{2}{3}, \quad c_7 = \frac{2c_5}{7} = \frac{2}{7}\frac{2}{5}\frac{2}{3}$$

y así sucesivamente. Procediendo por inducción, se encuentra que

$$c_{2n+1} = \frac{2^n}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

Asi pues, se tiene que

$$y_2(x) = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2^2 x^5}{3 \cdot 5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n+1}}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

es una segunda solución de (4).