Serie de Potencias

Definición 1. *Una serie de potencias en (potencias de) $x-a$ es una serie infinita de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \tag{1}$$

Si $a=0$, esta es la serie de potencias de x

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots c_n x^n + \cdots \tag{2}$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ son constantes se le llama serie de potencias

La serie de potencias (2) converge en un intervalo I siempre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n x^n \tag{3}$$

exista para toda x en I. En este caso la suma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{4}$$

se define en I, y a esta serie $\sum\ c_n x^n$ se le llama representación en serie de potencias de la función f en I. Las siguientes representaciones en serie de potencias de funciones elementales son conocidas debido a que se estudian en cursos introductorios de cálculo:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{5}$$

$$\cos\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{6}$$

$$\operatorname{sen}\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \tag{7}$$

$$\cosh\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{8}$$

$$\operatorname{senh}\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \tag{9}$$

$$\ln\ (1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \tag{10}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots \tag{11}$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha\ x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!}+\cdots \tag{12}$$

En una notación de suma compacta seguimos las convenciones usuales de $0!=1$ y $x^0=1$ para toda x, incluyendo $x=0$. Las series (5) a la (9) convergen a la función indicada para todo valor de x. En contraste, las series (10) y (11) convergen si $x<1$, pero divergen si $x>1$. (¿Qué pasa si $|x|=1$?) La serie (11) es la serie geométrica. La serie (12), con un número real arbitrario α, es la serie binomial. Si α es un entero no negativo n, entonces la serie (12) llega a su fin reduciendo la serie binomial a un polinomio de grado n, el cual converge con todo valor de x. De otra manera, la serie es en realidad infinita, y es convergente si $|x|<1$ y divergente si $|x|>1$; su comportamiento para $|x|=1$ depende del valor de α.
Observación. Las series de potencias como las ilustradas en los ejemplos (5) al (12) se obtienen por lo general de la serie de Taylor. La serie de Taylor con centro en $x=a$ de una función f es una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots \tag{13}$$

en potencias de $x-a$, bajo la hipótesis de que f es infinitamente derivable en $x=a$ [de tal manera que los coeficientes en la ec. (13) están todos definidos]. Si $a=0$, entonces la serie dada en (13) es la **serie de Maclaurin**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}(x-a)^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}}{3!}x^3+\cdots \tag{14}$$

Por ejemplo, supóngase que $f(x)=e^x$. Entonces $f^{(n)(x)}=e^x$, y por tanto $f^{(n)(0)}=1$ para toda $n\geq 0$. En este caso, la ecuación (14) se reduce a la **serie exponencial** dada en (5).
Lo primero que vamos a determinar cual es su dominio de convergencia.

Ejemplo La serie

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \quad converge \quad si \quad |x|\leq 1$$

Ejemplo La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n \quad converge \quad si \quad x=0$$

Esto se puede determinar usando el criterio del cociente, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)x \ \ la \ \ cual \ \ converge \ \ si \ \ x=0$$

Ejemplo La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad converge \ \ \forall \ \ x\in\mathbb{R}$$

Esto se puede determinar usando el criterio del cociente, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1}=0<1 \quad por \quad tanto \ \ converge \ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$$

Ejemplo Aplicando el criterio del cociente, indique el intervalo de convergencia para la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$$

Solución Sea

$$a_n=\frac{x^n}{2^n}$$

según el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{x^n}{2^n}}\right|=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}|x|=\frac{1}{2}|x|$$

Se tiene que

$$\frac{1}{2}|x|<1 \;\Leftrightarrow\; |x|<2 \;\Leftrightarrow\; -2<x<2$$

por lo tanto el intervalo de convergencia es $x\in(-2,2)$

Ejemplo Aplicando el criterio del cociente, indique el intervalo de convergencia para la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-5)^n}{4^n n}$$

Solución Sea

$$a_n=\frac{(-1)^n(x-5)^n}{4^n n}$$

según el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(x-5)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)}}{\frac{(-1)^n(x-5)^n}{4^n n}}\right|=|x-5|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{4(n+1)}\right|=\frac{1}{4}|x-5|$$

Se tiene que

$$\frac{1}{4}|x-5|<1 \;\Leftrightarrow\; |x-5|<4 \;\Leftrightarrow\; 1<x<9$$

por lo tanto el intervalo de convergencia es $x\in(-2,2)$

Operaciones con series de potencias Si la serie de Taylor de la función f converge a f (x) para toda x en algún intervalo abierto que contenga a, entonces se dice que la función f es **analítica** en el punto $x=a$. Por ejemplo,

a) toda función algebraica es analítica en cualquier punto;

b) toda función racional es analítica siempre que el denominador sea diferente de cero;

c) si dos funciones f y g son analíticas en $x=a$, también lo serán su suma $f+g$, su producto $f\cdot g$, y su cociente $\frac{f}{g}$ si $g(a)\neq 0$.

Por fortuna las series de potencias pueden manejarse algebraicamente en forma muy similar a los polinomios. Por ejemplo, si

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y \qquad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \tag{15}$$

entonces

$$f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n \tag{16}$$

$$f(x)g(x)=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots \tag{17}$$

Ejemplo Tenemos que

$$\begin{aligned}
\text{sen } x \ \cos\ x &= \left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\cdots\right)\\
&= x+\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)x^3+\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{120}\right)x^5+\cdots\\
&= x-\frac{4}{6}x^3+\frac{16}{120}x^5-\cdots\\
&= \frac{1}{2}\left[(2x)-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\cdots\right]\\
&= \frac{1}{2}\text{sen } 2x
\end{aligned}$$

para toda x.
De manera similar, el cociente de dos series de potencias se calcula por división sintética como se ilustra en la figura

$$\begin{array}{r|rrrrrrrrr}
 & x & + & \frac{x^3}{3} & + & \frac{2x^5}{15} & + & \frac{17x^7}{315} & + \cdots \\
\hline
1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\cdots & x & - & \frac{x^3}{6} & + & \frac{x^5}{120} & - & \frac{x^7}{5040} & + \cdots \\
 & x & - & \frac{x^3}{2} & + & \frac{x^5}{24} & - & \frac{x^7}{720} & + \cdots \\
\cline{2-9}
 & & & \frac{x^3}{3} & - & \frac{x^5}{30} & + & \frac{x^7}{840} & + \cdots \\
 & & & \frac{x^3}{3} & - & \frac{x^5}{6} & + & \frac{x^7}{72} & - \cdots \\
\cline{4-9}
 & & & & & \frac{2x^5}{15} & - & \frac{4x^7}{315} & + \cdots \\
 & & & & & \frac{2x^5}{15} & - & \frac{x^7}{15} & + \cdots \\
\cline{6-9}
 & & & & & & & \frac{17x^7}{315} & + \cdots
\end{array}$$

La división de la serie de Taylor del $\cos x$ entre el $\operatorname{sen} x$ proporciona los primeros términos de la serie

$$\tan\ x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots \tag{18}$$

La división de series de potencias es más conflictiva que la multiplicación, ya que puede fallar la convergencia en algunos puntos donde las series tanto de f como de g sí son convergentes. Por ejemplo, las series de seno y coseno convergen para toda x, pero la serie de la tangente dada en (18) converge sólo si $x < \frac{pi}{2}$.

Derivación de series de potencias término a término Si la representación de la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \tag{19}$$

de la función f converge en el intervalo abierto I, entonces f es derivable en I, y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\ c_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots \tag{20}$$

en cada punto de I.

ejemplo Por ejemplo, de la derivación de la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \tag{21}$$

se obtiene

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \tag{22}$$

Corrimiento del índice de la suma Una serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\ c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\ c_{n+1} x^n \tag{23}$$

al realizar un corrimiento del índice de la suma (23) en la serie de la izquierda. Esto es, simultáneamente se incrementó el índice de la suma en 1 (reemplazando n por $n+1$, $n \to\ n+1$) y se disminuyó el punto de partida en 1, de $n = 1$ a $n = 0$, obteniendo de esta manera la serie de la derecha.

Más en general, puede hacerse un corrimiento del índice de la suma en k unidades para una serie infinita si en forma simultánea se incrementa el índice de la suma en k($n \to\ n+k$) y también se disminuye el valor de inicio en k. Por ejemplo, un corrimiento de $+2(n \to\ n+2)$ da como resultado

$$\sum_{n=3}^{\infty} n\ a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\ a_{n+2} x^{n+1}$$

Si k es negativa, se interpreta una "disminución en k" como un incremento en $-k = |k|$. De esta manera, un corrimiento en $-2(n \to\ n-2)$ en el índice de la suma resulta en

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\ a_n x^{n-1} = \sum_{n=3}^{\infty}\ (n-2)a_{n-2}x^{n-3}$$

Radio de convergencia Dada la serie de potencias $\sum\ c_n x^n$, supóngase que el límite

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

existe (ρ es finito) o es infinito (en este caso se escribe $\rho = \infty$). De este modo,

a) Si $\rho = 0$, entonces la serie diverge para toda $x \neq 0$

b) Si $0 < \rho < \infty$, entonces $\sum\ c_n x^n$ converge si $|x| < \rho$, y diverge si $|x| > \rho$

c) Si $\rho < \infty$, entonces la serie converge para todo valor de x.

el valor de ρ se llama radio de convergencia de la serie de potencias $\sum\ c_n x^n$.

Ejemplo Encuentre el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}x^n$$

Solución En este caso

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{3^n}}{\frac{n+2}{3^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n+3}{n+2}\right| = 3$$

Así, la serie converge si $-3 < x < 3$, y diverge si $|x| > 3$