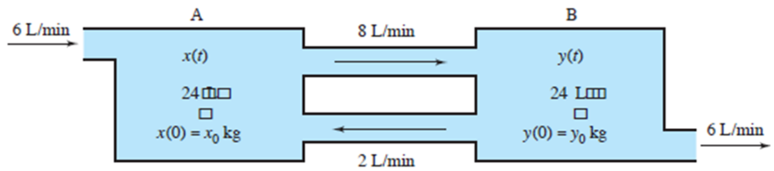
Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden

Ejemplo Dos grandes tanques, cada uno de los cuales contiene 24 litros de una solución salina, están conectados entre sí mediante unos tubos, como se muestra en la figura



El tanque A recibe agua pura a razón de 6 litros/minuto y el líquido sale del tanque B con la misma razón; además, se bombean 8 litros/minuto de líquido del tanque A al tanque B y 2 litros/minuto del tanque B al tanque A. Los líquidos dentro de cada tanque se mantienen bien revueltos, de modo que cada mezcla es homogénea. Si en un principio la solución salina en el tanque A contiene x_0 kg de sal y la del tanque B contiene inicialmente y_0 kg de sal, determinar la masa de sal en cada tanque en el instante $t > 0$.

Solución Observe que el volumen de líquido en cada tanque es constante e igual a 24 litros, debido al equilibrio entre las razones de entrada y salida. Por lo tanto, tenemos dos funciones incógnitas de t: la masa de sal x(t) en el tanque A y la masa de sal y(t) en el tanque B. Si centramos nuestra atención en un tanque a la vez, podemos deducir dos ecuaciones que relacionen estas incógnitas. Como el sistema es alimentado con agua pura, esperamos que el contenido de sal de cada tanque tienda a cero cuando $t \to \infty$.

Para formular las ecuaciones de este sistema, igualamos la razón de cambio de sal en cada tanque con la razón neta con la que se transfiere la sal a ese tanque. La concentración de sal en el tanque A es $\left[\frac{x(t)}{24}\right]$ [kg/litro], de modo que el tubo superior saca sal del tanque A a razón de $\left[\frac{8x}{24}\right]$ [kg/minuto]; de manera similar, el tubo inferior lleva sal al tanque A a razón de $\left[\frac{2y}{24}\right]$ [kg/minuto] (la concentración de sal en el tanque B es $\left[\frac{y}{24}\right]$ [kg/litro)]. El flujo de agua pura, por supuesto no transfiere sal (simplemente mantiene el volumen del tanque A en 24 litros). Por nuestra premisa,

$\frac{dx}{dt}$ =razón de entrada-razón de salida,

de modo que la razón de cambio de la masa de sal en el tanque A es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{24}y - \frac{8}{24}x = \frac{1}{12}y - \frac{1}{3}x$$

La razón de cambio de sal en el tanque B se determina mediante los mismos tubos de conexión y por el tubo de drenado, que saca $\left[\frac{6y}{24}\right]$ [kg /minuto]:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{8}{24}x - \frac{2}{24}y - \frac{6}{24}y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y$$

Así, los tanques interconectados quedan descritos mediante un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x' &= -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{12}y \\ y' &= \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}y \end{aligned} \tag{1}$$

Aunque ambas incógnitas $x(t)$ y $y(t)$ aparecen en cada una de las ecuaciones (están acopladas), la estructura es tan transparente que podemos obtener una ecuación sólo en términos de y, despejando x en la segunda ecuación,

$$x = 3y' + y \tag{2}$$

y sustituyendo (1) en la primera ecuación para eliminar x:

$$\begin{aligned} (3y' + y)' &= -\frac{1}{3}(3y' + y) + \frac{1}{12}y \\ 3y'' + y' &= -y' - \frac{1}{3}y + \frac{1}{12}y \end{aligned}$$

o

$$3y'' + 2y' + \frac{1}{4}y = 0$$

Esta última ecuación, que es lineal con coeficientes constantes, se resuelve fácilmente mediante la ecuación auxiliar

$$3r^2 + 2r + \frac{1}{4} = 0$$

que tiene raíces $-\dfrac{1}{2}, \ -\dfrac{1}{6}$ y cuya solución genral es

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} + c_2 e^{-\frac{t}{6}} \tag{3}$$

Una vez determinada y, la usamos en la ecuación (2) para deducir una fórmula para x:

$$x(t) = 3\left(-c_1 e^{-\frac{t}{2}} - c_2 e^{-\frac{t}{6}}\right) + c_1 e^{-\frac{t}{2}} + c_2 e^{-\frac{t}{6}} = -\frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}c_2 e^{-\frac{t}{6}} \tag{4}$$

Las fórmulas contienen dos parámetros indeterminados, c_1 y c_2, que podemos ajustar para cumplir con las condiciones iniciales dadas:

$$x(0) = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = x_0, \quad y(0) = c_1 + c_2 = y_0$$

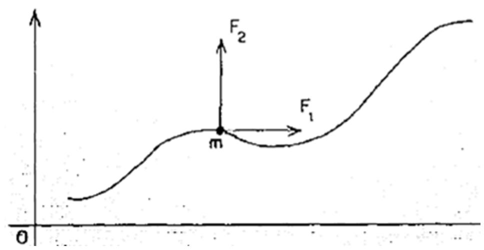
o

$$c_1 = \frac{y_0 - 2x_0}{2}, \quad c_2 = \frac{y_0 + 2x_0}{2}$$

Así, las masas de sal en los tanques A y B en el instante t son, respectivamente,

$$\begin{aligned} x(t) &= -\left(\tfrac{y_0 - 2x_0}{4}\right) e^{-\frac{t}{2}} + \left(\tfrac{y_0 + 2x_0}{4}\right) e^{-\frac{t}{6}} \\ y(t) &= -\left(\tfrac{y_0 - 2x_0}{2}\right) e^{-\frac{t}{2}} + \left(\tfrac{y_0 + 2x_0}{2}\right) e^{-\frac{t}{6}} \end{aligned} \tag{5}$$

Supóngase que una partícula de masa m se mueve en el plano XY debido a que actúa sobre ella una fuerza tal que su dirección está en el plano XY, y que su magnitud depende de la posición instantenea (x, y) de la partícula en l tiempo t, si la pertícula está iniciañmente en reposo en algún punto, digamos el origen, es natural preguntar donde estará la particula en cualquier tiempo posterior. Si consideramos la fuerza en dos componentes F_1 y F_2 en las direcciones positivas X y Y como se ve en la figura



entonces por la ley de Newton se tiene que:

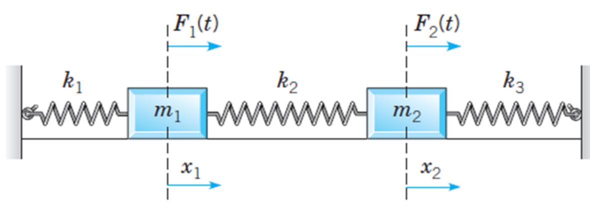
$$m\frac{d^2}{dt}x = F_1(x, y, t), \qquad m\frac{d^2}{dt}y = F_2(x, y, t) \tag{6}$$

con las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$. A la expresión (6) se le denomina Sistema de ecuaciones diferenciales, siendo su forma más general la expresión

$$F_m\left(t, f_1, f'(t), ...f^n, ..., f_m, f'_m, ..., f^n_m\right) \tag{7}$$

El orden de la mayor derivada que aparece en el sistema de ecuaciones diferenciales define el orden del sistema, por ejemplo el sistema (6) es de segundo orden.

ejemplo Considérese el sistema resorte-masa de la figura. Las dos masas se mueven sobre un superficie sin fricción bajo la influencia de las fuerzas externas $F_1(t)$ y $F_2(t)$ y también están restringidas por los tres resortes cuyas constantes son k_1, k_2 y k_3, respectivamente.

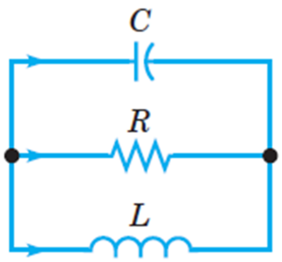


Se encuentran las siguientes ecuaciones para las coordenadas x_1 y x_2 de las dos masas

$$\begin{aligned} m_1\frac{d^2}{dt^2}x_1 &= k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 + F_1(t) \\ &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 + F_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2\frac{d^2}{dt^2}x_2 &= -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 + F_2(t) \\ &= k_2x_1 - (k_1 + k_2)x_2 + F_2(t) \end{aligned}$$

Ejemplo A continuación, considere el circuito LRC paralelo que se muestra en la Figura. Sea V la caida de voltaje a través del capacitor e I la corriente que pasa por la inductancia.



Podemos mostrar que el voltaje y la corriente están descritas por el sistema de ecuaciones.

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L}$$
$$\frac{dV}{dt} = -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC}$$

en donde L es la inductancia, C la capacitancia y R la resistencia

Una razón por la que los sistemas de ecuaciones de primer orden son particularmente importantes es que Las ecuaciones de orden superior siempre se pueden transformar en tales sistemas.

Ejemplo El movimiento de cierto sistema resorte-masa se describe por la ecuación diferencial de segundo orden

$$u'' + 0{,}125u' + u = 0 \tag{8}$$

Escribir de nuevo esta ecuación como un sistema de ecuaciones de primer orden.

Solución Sean $x_1 = u$ y $x_2 = u'$; entonces se deduce que $x_1' = x_2$. además, $u'' = x_2'$. Al sustituir u, u' y u'' de la ecuación (8) se obtiene

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = -x_1 - 0{,}125x_2$$

ejemplo La ecuación general de movimiento de un sistema resorte-masa,

$$mu'' + \gamma u' + k\ u = 0 \tag{9}$$

puede transformarse en un sistema de ecuaciones de primer orden de la misma manera. Si se hace $x_1 = u$ y $x_2 = u'$ y se procede como en el ejemplo anterior y se obtiene el sistema

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = \left(\frac{k}{m}\right) x_1 - \left(\frac{\gamma}{m}\right) x_2 + \frac{F(t)}{m}$$