Transformación de una ecuación lineal de orden superior a un sistema de ecuaciones

Ejemplo La ecuación diferencial de segundo orden

$$x'' + px' + qx = 0$$

(con coeficientes constantes y variable independiente t) se transforma, vía la sustituciones $x' = y$, $x'' = y'$, en un sistema lineal de dos dimensiones

$$x' = y$$

$$y' = -qx - py$$

Inversamente si se tiene el sistema

$$x' = y$$

$$y' = -qx - py$$

entonces

$$x'' = y' = -qx - py = -qx - px'$$

por lo que

$$x'' = -qx - px' \;\Rightarrow\; x'' + px' + qx = 0$$

se regresa a la ecuacón original.
Para describir cómo se lleva a cabo esta transformación, admítase un sistema que consiste de una ecuación de enésimo orden

$$x^n = f(t, x, x', ..., x^{n-1})$$

Introduciendo las variables dependientes $x_1, x_2, \ldots x_n$ definidas como sigue:

$$x_1 = x,\; x_2 = x',\; x_3 = x'', ..., x_n = x^{n-1}$$

Nótese que $x_1' = x' = x_2$, $x_2' = x'' = x_3$, y así sucesivamente. Por tanto, la sustitución de estas variables en la ecuación proporciona el sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

de n ecuaciones de primer orden. Evidentemente, este sistema es equivalente a la ecuación de enésimo orden original dada, en el sentido de que x(t) es una solución de la ecuación si y sólo si las funciones $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ definidas en la ecuación satisfacen al sistema de ecuaciones dado.

Ejemplo Transforme la ecuación diferencial dada, en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales

1. $x'' + 3x' + 7x = t^2$
2. $t^2x'' + tx' + (t^2 - 1)x = 0$
3. $x''' + 3x'' + 2x' - 5x = \text{sen } 2t$

Solución 1. En este caso definimos

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x_1' = x' \end{aligned}$$

Se tiene entonces el sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -7x - 3x' + t^2 = -7x_1 - 3x_2 + t^2 \end{aligned}$$

2. En este caso definimos

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x_1' = x' \end{aligned}$$

Se tiene entonces el sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_1'' = x'' = \frac{-tx' - (t^2 - 1)x}{t^2} = \frac{-tx_2 - (t^2 - 1)x_1}{t^2} \end{aligned}$$

3. En este caso definimos

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x_1' = x' \\ x_3 &= x_2' = x_1'' = x'' \end{aligned}$$

Se tiene entonces el sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x''' = \text{sen } 2t - 3x'' - 2x' + 5x = \text{sen } 2t - 3x_3 - 2x_2 + 5x_1 \end{aligned}$$

Ejemplo Para resolver el sistema de dos dimensiones

$$x' = -2y$$

$$y' = \frac{1}{2}x$$

se inicia con la observación de que

$$x'' = -2y' = -2\left(\frac{1}{2}x\right) = -x$$

De aquí se obtiene la ecuación de segundo orden $x'' + x = 0$, cuya solución general es

$$x(t) = A \ \cos \ t + B \ \operatorname{sen} \ t = C \ \cos(t - \alpha)$$

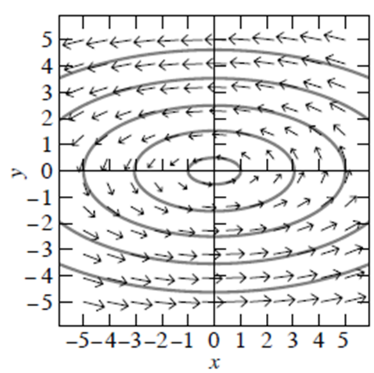
donde $A = C \ \cos \ \alpha + B$ y $B = C \ \operatorname{sen} \ \alpha$. Entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{2}x'(t) = -\frac{1}{2}(-A \operatorname{sen} \ t + B \ \cos \ t) \\ &= \frac{1}{2} \ C \ \operatorname{sen}(t - \alpha) \end{aligned}$$

Utilizando la identidad $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta$ se concluye que para cada valor de t, el punto $(x(t), y(t))$ se encuentra en la elipse

$$\frac{x^2}{C^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{C}{2}\right)^2}} = 1$$

con semiejes C y $\dfrac{C}{2}$. La figura muestra varias de estas elipses en el plano xy.



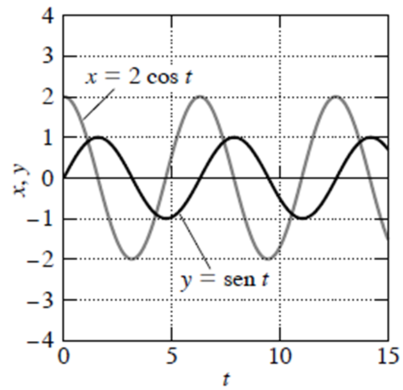
Ejemplo Con los valores iniciales $x(0) = 2$, $y(0) = 0$, la la solución general del ejemplo anterior resuelve

$$x(0) = A = 2, \quad y(0) = -\frac{1}{2}B = 0$$

La solución particular resultante está dada por

$$x(t) = 2\ \cos\ t, \quad y(t) = \ sen\ t$$

Las gráficas de las dos funciones se muestran en la figura.



Obsérvese que x(t) inicialmente decrece mientras que y(t) crece. De aquí se concluye que, conforme t crece, el punto de solución (x(t), y(t)) atraviesa la trayectoria $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ en dirección contraria a las manecillas del reloj como lo indican los vectores del campo direccional de la figura anterior.