Sistemas de Ecuaciones homogeneas

Dado el sistema lineal de primer orden

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1(t)\\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2(t)\\
&\vdots\\
x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n(t)
\end{aligned}$$

lo podemos expresar en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Lo podemos denotar

$$X' = AX + B(t)$$

donde

$$X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B(T) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Si $B(t) = 0 \; \forall \; t$ se dice que el sistema lineal es homogéneo, en otro caso, se dice que es no homogéneo.

Ejemplo Dado el sistema

$$\begin{aligned}
x' &= 3x + 4y\\
y' &= 5x - 7y
\end{aligned}$$

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Un vector solución en un intervalo I es cualquier matriz columna

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

cuyos elementos son funciones diferenciables que satisfacen

$$X' = AX + B(t)$$

Ejemplo Compruebe que en el intervalo $(-\infty, \infty)$

$$X_1 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

son soluciones de

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X$$

Solución En este caso

$$X_1' = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad X_2' = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix}$$

por lo que

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3e^{-2t} \\ 5e^{-2t} - 3e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} = X_1'$$

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} + 15e^{6t} \\ 15e^{6t} + 15e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix} = X_2'$$

Si t_0 es un punto del intervalo I y

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} \quad y \quad X_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

entonces el problema

$$X' = AX + F(T), \quad X(t_0) = X_0$$

es un problema de valor inicial.

Teorema 1. *Teorema de existencia y unicidad.*
Sean $A(T)$, $F(T)$ funciones continuas en un intervalo común I que contiene al punto t_0. Entonces existe una única solución del problema con valor inicial

$$X' = AX + F(T), \quad X(t_0) = X_0$$

Ejemplo Dado el sistema

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 4y \\ y' &= 5x - 7y \end{aligned}$$

su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Definición 1. *Un vector solución en un intervalo I es cualquier matriz columna*

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

cuyos elementos son funciones derivables que satisfacen el sistema en el intervalo.

Un vector solución de es, por supuesto, equivalente a n ecuaciones escalares

$$x_1 = \phi_1(t), x_2 = \phi_2(t), ..., x_n = \phi_n(t)$$

y se puede interpretar desde el punto de vista geométrico como un conjunto de ecuaciones paramétricas de una curva en el espacio. En el caso importante $n = 2$, las ecuaciones $x_1 = \phi_1(t)$, $x_2 = \phi_2(t)$ representan una curva en el plano x_1x_2. Es práctica común llamar trayectoria a una curva en el plano y llamar **plano fase al plano** x_1x_2.

Ejemplo Compruebe que en el intervalo $(-\infty, \infty)$

$$X_1 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \quad y \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

son soluciones de

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X$$

Ejemplo De

$$X_1' = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} \quad y \quad X_2' = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix}$$

vemos que

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3e^{-2t} \\ 5e^{-2t} - 3e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} = X_1'$$

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} + 15e^{6t} \\ 15e^{6t} + 15e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix} = X_2'$$

Gran parte de la teoría de sistemas de n ecuaciones diferenciales de primer orden es similar a la de las ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden.

Problema con valores iniciales Sea t_0 que denota un punto en un intervalo I y

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

donde las $\gamma_i = 1, 2, ..., n$ son las constantes dadas. Entonces el problema

$$X' = A(t)X + F(T) \qquad X(t_0) = X_0$$

es un problema con valores iniciales en el intervalo.

Teorema 2. *Existencia de una solución única.*
Sean los elementos de las matrices A(t) y F(t) funciones continuas en un intervalo común I que contiene al punto t_0. Entonces existe una solución única del problema con valores iniciales en el intervalo.

Sistemas Homogéneos En las siguientes definiciones y teoremas se consideran sólo sistemas homogéneos. Sin afirmarlo, siempre se supondrá que las a_{ij} y las f_i son funciones continuas de t en algún intervalo común I.

Principio de superposición El siguiente resultado es un principio de superposición para soluciones de sistemas lineales.

Teorema 3. *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en el intervalo abierto I, n soluciones de la ecuación lineal homogénea dada. Si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes, entonces la combinación lineal*

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t)$$

es también una solución de la ecuación en I.

Demostración. Se sabe que $x_i' = A(t)x_i$ para cada i $(1 \leq i \leq n)$; de aquí se concluye que

$$\begin{aligned} x' &= c_1x_1' + c_2x_2' + \cdots + c_nx_n' \\ &= c_1A(t)x_1 + c_2A(t)x_2 + \cdots + c_nA(t)x_n \\ &= A(t)(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n) \end{aligned}$$

Esto es, $x' = A(t)x$, como se deseaba. La notable simplicidad de esta demostración permite apreciar claramente las ventajas de la notación de matrices.
Se deduce del teorema que un múltiplo constante de cualquier vector solución de un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden es también una solución. □

Dependencia e independencia lineal Estamos interesados principalmente en soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo

$$X' = A(t)X$$

La independencia lineal se define para funciones con valores vectoriales de la misma manera que para funciones con valores reales. Las funciones con valores vectoriales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son linealmente dependientes en el intervalo I siempre que existan constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no todas nulas, tal que

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) = 0$$

para toda t en I. En caso contrario, son linealmente independientes. En forma equivalente, existe independencia lineal siempre que una de ellas no sea una combinación lineal de las otras. linealmente independientes porque es claro que ninguna de ellas es un múltiplo escalar de la otra.

Wronskiano Tal como en el caso de una ecuación de orden n, existe un determinante wronskiano que nos dice si n soluciones dadas de la ecuación homogénea son linealmente dependientes o no. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son tales soluciones, entonces su wronskiano es el determinante de $n \times n$

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

Puede escribirse $W(t)$ o $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Nótese que W es el determinante de la matriz que tiene como sus vectores columna las soluciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Teorema 4. *Wronskianos de soluciones.*
Supóngase que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son n soluciones de la ecuación lineal homogénea $x' = A(t)x$ en un intervalo abierto I. Supóngase además que $A(t)$ es continua en I. Sea

$$W = W(x_1, x_2, ..., x_n)$$

entonces

1. *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son linealmente dependientes en I, entonces $W = 0$ en cada punto de I.*

2. *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son linealmente independientes en I, entonces $W \neq 0$ en cada punto de I.*

Así, existen sólo dos posibilidades para las soluciones de sistemas homogéneos: ya sea que $W = 0$ en cada punto de I, o que $W = 0$ en ningún punto de I.

Ejemplo En los problemas siguientes primero verifique que los vectores proporcionados son soluciones de los sistemas dados. Posteriormente utilice el wronskiano para mostrar que son linealmente independientes.

$$X' =, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -3e^t \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$$

Solución En este caso tenemos que

$$X_1' = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -3e^t \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -3e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8e^t - 6e^t \\ -6e^t + 3e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^t \\ -3e^t \end{pmatrix} = AX_1$$

$$X_2' = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{2t} - 2e^{2t} \\ -3e^{2t} + e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} = AX_2$$

Por otro lado el Wronskiano

$$W(t) = \begin{vmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ -3e^t & -e^{2t} \end{vmatrix} = e^{3t} \neq 0$$

por tanto las soluciones X_1, X_2 son linealmente independientes.