Sistemas de Ecuaciones homogeneas

Ejemplo Vamos a verificar que

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \\ -e^{3t} \end{pmatrix}, \quad x_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^{5t} \\ -2e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix}$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} X$$

El wronskiano de estas soluciones es

$$\begin{vmatrix} 2e^t & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 2e^t & 0 & -2e^{5t} \\ e^t & -e^{3t} & e^{5t} \end{vmatrix} = -16e^{9t}$$

el cual nunca es cero. Así, las soluciones x_1, x_2 y x_3 son linealmente independientes (en cualquier intervalo abierto).

Teorema 1. ***Soluciones generales de sistemas homogéneos****. Sean n soluciones linealmente independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la ecuación lineal homogénea$X' = A(t)X$ en el intervalo abierto I, donde $A(t)$ es continua. Si $x(t)$ es cualquier solución de la ecuación $X' = A(T)X$ en I, entonces existen valores $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que*

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t)$$

para toda t en I.

Demostración. Sea a un punto fijo de I. Muéstrese primero que existen números de $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que la solución

$$y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t)$$

tiene los mismos valores iniciales en $t = a$ que la solución dada x(t); esto es, tal que

$$c_1x_1(a) + c_2x_2(a) + \cdots + c_nx_n(a)$$

Sea X(t) la matriz de $n\times$ con vectores columna $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y sea c el vector columna con componentes $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Entonces la ecuación puede escribirse en la forma

$$X(a)c = x(a)$$

El determinante wronskiano $W(a) = X(a)$ es diferente de cero debido a que las soluciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son linealmente independientes. En consecuencia, la matriz X(a) tiene una matriz inversa $X^{-1}(a)$, por lo que el vector $c = X^{-1}(a)x(a)$ satisface la ecuación como se deseaba. □

Se introduce ahora una eficaz alternativa al método de eliminación para construir la solución general de un sistema lineal homogéneo de primer orden con coeficientes constantes,

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

se sabe que es suficiente encontrar n vectores solución linealmente independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$; la combinación lineal

$$x(t) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

con coeficientes arbitrarios será entonces una solución general del sistema.
Para buscar los n vectores solución linealmente independientes por analogía, se procede con el método de raíces características para resolver una sola ecuación homogénea con coeficientes constantes. Es razonable anticipar los vectores solución de la forma

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1e^{\lambda t} \\ v_2e^{\lambda t} \\ v_3e^{\lambda t} \\ \vdots \\ v_ne^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = ve^{\lambda t}$$

donde $\lambda, v_1, v_2, \ldots, v_n$ son constantes escalares apropiadas. Si se sustituyen

$$x_i = ve^{\lambda t}, \quad x_i' v_i e^{\lambda t}, \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

entonces cada término en las ecuaciones resultantes tiene el factor $e^{\lambda t}$, tal que se pueden cancelar. Esto nos permitirá contar con n ecuaciones lineales, las cuales —para valores apropiados de λ— se puede esperar resolver para ciertos valores de los coeficientes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de la ecuación, tal que $x(t) = ve^{\lambda t}$ sea, efectivamente, una solución del sistema dado
Para investigar esta posibilidad, es más eficiente escribir el sistema dado en en la forma matricial.

$$x' = Ax$$

donde $A = [a_{ij}]$. Cuando se sustituye la solución de prueba $x = ve^{\lambda t}$ con derivada $x' = \lambda ve^{\lambda t}$ en la ecuación $x' = Ax$, el resultado es

$$\lambda ve^{\lambda t} = Ave^{\lambda t}$$

Cancelamos el factor escalar diferente de cero $e^{\lambda t}$ para obtener

$$Av = \lambda v$$

Esto significa que $x = ve^{\lambda t}$ será una solución no trivial de la ecuación siempre que v sea un vector diferente de cero y λ sea una constante tal que la ecuación se cumpla; esto es, el producto de matrices Av es un múltiplo escalar del vector v.

La pregunta ahora es: ¿cómo encontrar v y λ?
Para responder, se reescribe la ecuación $Av = \lambda v$ en la forma

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Dada λ, éste es un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas en las incógnitas $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Por un teorema estándar del álgebra lineal, tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante de su matriz de coeficientes se anula; esto es, si y sólo si

$$|A - \lambda I| = \det(A - \lambda I) = 0$$

En su formulación más simple, el **método del eigenvalor** para resolver el sistema $x' = Ax$ consiste en encontrar un valor de λ tal que la ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$ se cumpla, y posteriormente resolver la ecuación $(A - \lambda I)v = 0$. con este valor de λ para obtener $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Entonces $x = ve^{\lambda t}$ será un vector solución. El nombre del método proviene de la siguiente definición.

Definición 1. *El número λ (cero o diferente de cero) se llama **eigenvalor** de la matriz A de tamaño $n \times n$ siempre que*

$$|A - \lambda I| = 0$$

*Un **eigenvector** asociado con el eigenvalor λ es un vector no cero v por consiguiente $Av = \lambda v$, tal que*

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Nótese que si v es un eigenvector asociado con el eigenvalor λ, de la misma manera es cualquier múltiplo escalar constante diferente de cero cv de v; esto se concluye de la multiplicación de cada lado de la ecuación $(A - \lambda I)v = 0$ por $c \neq 0$.
El prefijo eigen es una palabra alemana con la traducción aproximada de característico en este contexto; los términos valor característico y vector característico son de uso común. Por esta razón, la ecuación

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

se llama **ecuación característica** de la matriz A; sus raíces son los eigenvalores de A. Después de desarrollar el determinante en $|A - \lambda I|$, evidentemente se obtiene un polinomio de grado n de la forma

$$(-1)^n \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 = 0$$

Por el teorema fundamental del álgebra, esta ecuación tiene n raíces posiblemente algunas serán complejas o repetidas y de este modo una matriz de $n \times n$ tiene n eigenvalores (contando repeticiones, si hubiera). Aunque se considera que los elementos de A son números reales, existe la posibilidad de tener eigenvalores y eigenvectores complejos.

Teorema 2. *Soluciones de $x' = Ax$ con eigenvalores.*
Sea λ un eigenvalor (constante) de la matriz de coeficientes A del sistema lineal de primer orden

$$x' = Ax$$

Si v es un eigenvector asociado de λ, entonces

$$x(t) = ve^{\lambda t}$$

es una solución no trivial del sistema.

El método del eigenvalor La descripción general de este método para resolver el sistema con coeficientes constantes homogéneos de $n \times n$, $x' = Ax$ es de la siguiente manera:

1. Primero se resuelve la ecuación característica dada en $|A - \lambda I|$ para los eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de la matriz A.
2. Luego se intenta encontrar n eigenvectores linealmente independientes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ asociados con estos eigenvalores.
3. El paso 2 no siempre es posible, pero cuando lo es, se obtienen n soluciones linealmente independientes
$$x_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = v_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \quad x_n(t) = v_n e^{\lambda_n t}$$
En este caso, la solución general de $x' = Ax$ es una combinación lineal
$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t)$$
de estas n soluciones.

Ejemplo Encuéntrese la solución general del sistema usando el método de los eigenvalores

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 6x_2 \\ x_2' &= -2x_1 - 5x_2 \end{aligned}$$

Solución En este caso la forma matricial del sistema es

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} X$$

la ecuación característica $|A - \lambda I|$ es:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 6 \\ -2 & -5 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(-5 - \lambda) - (-2)(6) \\ &= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

por lo que $\lambda = -1$ y $\lambda = -2$ son los valores propios.

1. **Caso 1** $\lambda = -1$. La sustitución del primer eigenvalor $\lambda = -1$ en la ecuación $(A - \lambda I)v = 0$ no da
$$\begin{pmatrix} 2 - (-1) & 6 \\ -2 & -5 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esto es

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esto produce el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= 0 \\ -2x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

el cual tiene una infinidad de soluciones, proponemos la solución $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$. Entonces la forma matricial de la solución es

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

vamos a comprobar que efectivamente es solución

$$x_1'(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4e^{-t} + 6e^{-t} \\ 4e^{-t} - 5e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} = Ax_1$$

2. **Caso 2** $\lambda = -2$. La sustitución del primer eigenvalor $\lambda = -2$ en la ecuación $(A - \lambda I)v = 0$ no da

$$\begin{pmatrix} 2-(-2) & 6 \\ -2 & -5-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esto es

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esto produce el sistema

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 &= 0 \\ -2x_1 - 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

el cual tiene una infinidad de soluciones, proponemos la solución $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$. Entonces la forma matricial de la solución es

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

vamos a comprobar que es solución

$$x_2'(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -6e^{-2t} \\ 4e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{-2t} - 12e^{-2t} \\ -6e^{-2t} + 10e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix} = Ax_2$$

El Wronskiano no dice que

$$\det \begin{pmatrix} -2e^{-t} & 3e^{-2t} \\ e^{-t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2e^{-t} & 3e^{-2t} \\ e^{-t} & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = 4e^{-3t} - 3e^{-3t} = e^{-3t} \neq 0$$

las soluciones son linealmente independientes y por tanto, una solución general del sistema es:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t}$$