Ecuaciones lineales de segundo orden

Dada la ecuación diferencial de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1}$$

con coeficientes constantes a,b y c, sustituimos $y = e^{rt}$ y obtenemos

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

que se puede escribir como

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0$$

como e^{rt} nunca es cero, concluimos que $y = e^{rt}$ es solución de la ecuación diferencial (1) precisamente cuando r es una raíz de la ecuación algebraica

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2}$$

Raíces reales distintas Si las raíces r_1 y r_2 de la ecuación (2) son reales y distintas, entonces

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

es una solución general de (1)

Ejemplo Determine la solución general de

$$2y'' - 7y' + 3y = 0$$

Solución En este caso podemos resolver la ecuación característica

$$2r^2 - 7r + 3 = 0$$

por medio de factorización

$$(2r - 1)(r - 3) = 0$$

Las raíces $r_1 = \dfrac{1}{2}$ y $r_2 = 3$ son reales y distintas, de modo que la solución general

$$y(x) = c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2e^{3x}$$

Raíces repetidas Si la ecuación auxiliar (2) tiene una raíz repetida r, entonces $y_1(x) = e^{r_1x}$ y $y_2(x) = xe^{r_2x}$ son soluciones de (1) y

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2xe^{r_2x}$$

es una solución general.

Ejemplo Determinar una solución del problema con valores iniciales

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

Solución En este caso la ecuación auxiliar es

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0$$

Como $r = -2$ es una raíz doble, se tienen las soluciones $y_1(x) = e^{-2x}$ y $y_2 = xe^{-2x}$, y la solución general

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

para determinar $c_1,\ c_2$ sustituimos en la solución general las condiciones iniciales

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2(0)e^0 = 1$$

$$y'(0) = -2c_1 e^0 + c_2 e^0 - 2c_2(0)e^0 = 3$$

y resolvemos las ecuaciones para ver que $c_1 = 1$, $c_2 = 5$. Así,

$$y(x) = e^{-2x} + 5xe - 2x$$

es la solución.

Ecuaciones auxiliares con raíces complejas La ecuación armónica simple y $y'' + y = 0$, que recibe este nombre por su relación con la vibración fundamental de un tono musical, tiene como soluciones $y_1(x) = \cos x$ y $y_2(x) = \operatorname{sen} x$. Observe, sin embargo, que la ecuación auxiliar asociada a la ecuación armónica es $r^2 + 1 = 0$, que tiene raíces imaginarias $r = \pm i$, donde i denota $\sqrt{-1}$.
Cuando $b^2 - 4ac < 0$, las raíces de la ecuación auxiliar

$$ar^2 + br + c = 0$$

asociadas a la ecuación homogénea

$$ay'' + by' + c = 0$$

son los números complejos conjugados

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad y \quad r_2 = \alpha - i\beta \qquad (i = \sqrt{-1})$$

donde α, β son los números reales

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tag{3}$$

Tenemos que si $r_1 = \alpha + i\beta$ es un número complejo, debemos aclarar qué entendemos por la expresión $e^{(\alpha+i\beta)x}$. Si suponemos que las leyes de los exponentes se aplican a los números complejos, entonces

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} \tag{4}$$

Ahora sólo debemos aclarar el significado de $e^{i\beta x}$.
Para esto, supondremos que la serie de Maclaurin de e^z para los números z es la misma que para los números reales. Como $i^2 = -1$, entonces para θ real tenemos

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots + + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

Ahora, recordemos la serie de Maclaurin para $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$:

$$\cos\ \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots$$
$$\operatorname{sen}\ \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots$$

Reconocemos estos desarrollos en la serie propuesta para $e^{i\theta}$ y hacemos la identificación

$$e^{i\theta} = \cos\ \theta + i \operatorname{sen}\ \theta$$

que se conoce como fórmula de Euler. Al usar la fórmula de Euler en (4) tenemos

$$e^{\alpha x}(\cos\ \beta\ x + i \operatorname{sen}\ \beta\ x)$$

que expresa la función compleja $e^{(\alpha+i\beta)x}$ en términos de funciones reales conocidas.
Entonces dado que la función compleja $e^{(\alpha+i\beta)x}$ es una solución de (1) al igual que $e^{(\alpha-i\beta)x}$, así, la solución general está dada por

$$y(x) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

que se puede escribir

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x}(\cos\ \beta\ x + i \operatorname{sen}\ \beta\ x) + c_2 e^{\alpha x}(\cos\ \beta\ x - i \operatorname{sen}\ \beta\ x)$$

Ejemplo Resolver el problema con valor inicial

$$y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

Solución En este caso la ecuación auxiliar es $r^2 + 2r + 2 = 0$, con raíces

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

Por tanto, si $\alpha = -1$ y $\beta = 1$, una solución general está dada por

$$y(x) = c_1 e^{-x}(\cos\ x + i \operatorname{sen}\ x) + c_2 e^{-x}(\cos\ x - i \operatorname{sen}\ x)$$

Para las condiciones iniciales tenemos

$$y(0) = c_1 e^0(\cos\ 0 + i \operatorname{sen}\ 0) + c_2 e^0(\cos\ 0 - i \operatorname{sen}\ 0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$y'(0) = -c_1 e^0(\cos\ 0 + i \operatorname{sen}\ 0) + c_1 e^0(-\operatorname{sen}\ 0 + i \cos\ 0) - c_2 e^0(\cos\ 0 - i \operatorname{sen}\ 0) + c_2 e^0(-\operatorname{sen}\ 0 - i \cos\ 0)$$
$$= (-1+i)c_1 + (-1-i)c_2 = 2$$

Como resultado, $c_1 = -i$, $c_2 = i$ y

$$y(x) = -ie^{-x}(\cos\ x + i \operatorname{sen}\ x) + ie^{-x}(\cos\ x + i \operatorname{sen}\ x) = 2e^{-x} \operatorname{sen}\ x$$

Soluciones reales obtenidas a partir de soluciones complejas Tenemos el siguiente resultado

Lema 1. *Sea $z(x) = u(x) + iv(x)$ una solución de (1), donde a,b y c son números reales. Entonces la parte real $u(x)$ y la parte imaginaria $v(x)$ son soluciones de (1) con valores reales*

Demostración. Por hipótesis $az'' + bz' + cz = 0$, de donde

$$a(u'' + iv'') + b(u' + iv') + c(u + iv) = 0$$

$$(au'' + bu' + cu) + i(av'' + bv'cv) = 0$$

Pero un número complejo se anula si y sólo si sus partes real e imaginaria se anulan. Así, debemos tener

$$au'' + bu' + cu = 0 \quad y \quad av'' + bv'cv = 0$$

lo que significa que $u(x)$ y $v(x)$ son soluciones con valores reales de 1). □

Ejemplo Determinar una solución general de

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

Solución En este caso la ecuación auxiliar es

$$r^2 + 2r + 4 = 0$$

con raíces

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

Por tanto, con $\alpha = -1$, $\beta = \sqrt{3}$, una solución general es

$$y(x) = c_1 e^{-t} \cos(\sqrt{3}x) + c_2 e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{3}x)$$

Cuando la ecuación auxiliar tiene raíces complejas conjugadas, las soluciones (reales) oscilan con valores positivos y negativos. Este tipo de comportamiento se observa en los resortes.