Teorema de existencia y unicidad de Picard

Considérese el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

donde f es una función dada de x y de y.
El problema de valor inicial (1) puede escribirse integrando ambos lados de la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ con respecto a x. Concretamente, si $y(x)$ satisface (1), entonces se tiene

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{ds}(s)\ ds = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\ ds$$

de tal modo que

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\ ds \tag{2}$$

Recíprocamente, si $y(x)$ es continua y satisface (2), entonces $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. Más aun, $y(x_0)$ es obviamente y_0. Por lo tanto, $y(x)$ es una solución de (1) si y sólo si es una solución de (2).
La ecuación (2) es una ecuación integral. Esto sugiere el siguiente método para obtener una sucesión de soluciones aproximadas $y_n(x)$. Se inicia proponiendo una solución tentativa $y_0(x)$. La elección más sencilla es $y_0(x) = y_0$. Para comprobar si $y_0(x)$ es solución de (2) se calcula

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0(s))\ ds$$

Si $y_1(x) = y_0$, entonces $y(x) = y_0$ es de hecho una solución de (2). Si no, se utiliza $y_1(x)$ como siguiente opción. Para comprobar si $y_1(x)$ es solución de (2) se calcula

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))\ ds$$

y así sucesivamente. De esta manera se define una sucesión de funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., donde

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\ ds \tag{3}$$

Las funciones $y_n(x)$ se llaman aproximacioes sucesivas o **iteraciones de Picard**, en honor al matemático francés que las descubrió. Sorprendentemente, las iteraciones (o iteradas) de Picard siempre convergen, en un intervalo adecuado, a una solución $y(x)$ de (2).

Ejemplo Calcular las iteraciones de Picard para el siguiente problema de valor inicial y mostrar que convergen a la solución $y(x) = e^x$

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

Solución La ecuación integral correspondiente al problema de valor inicial es

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(s)\ ds$$

Por lo tanto, $y_0(x) = 1$ y

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1\ ds = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x y_1\ ds = 1 + \int_0^x (1+s)\ ds = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

y en general

$$\begin{aligned} y_n(x) &= 1 + \int_0^x y_{n-1}(s)\ ds = 1 + \int_0^x \left[1 + s + \cdots + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\right]\ ds \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Ejemplo Calcular las iteraciones de Picard $y_1(x)$, $y_2(x)$ para el problema de valor inicial

$$y' = 1 + y^3, \quad y(1) = 1$$

Solución La ecuación integral correspondiente a este problema de valores iniciales es

$$y(x) = 1 + \int_1^x \left[1 + y^3(s)\right]\ ds$$

Por lo tanto, $y_0 = 1$

$$y_1(x) = 1 + \int_1^x [1+1]\ ds = 1 + 2(x-1)$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= 1 + \int_1^x \left(1 + [1 + 2(x-1)]^3\right)\ ds \\ &= 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + 2(x-1)^4 \end{aligned}$$