Ecuaciones no homogéneas: El método de Variación de parámetros

Dada la ecuación lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = g(x) \tag{1}$$

si se conocen las soluciones de la ecuación homogénea ecuación lineal no homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2}$$

se busca encontrar una solución de la ecuación homogénea.
Sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (2). Se tratará de encontrar una solución particular $\psi(x)$ de la ecuación no homogénea (1) del tipo

$$\psi(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

es decir, se intentará encontrar funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ tales que la combinación lineal $u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ sea una solución de (1). A primera vista esto podría parecer una idea mala, ya que se está cambiando el problema de encontrar una función desconocida $\psi(x)$ por el problem a aparentem ente más difícil de encontrar dos funciones desconocidas $u_1(x)$ y $u_2(x)$. Sin embargo, si se hace la elección adecuada, será posible encontrar a $u_1(x)$ y $u_2(x)$ como las soluciones de dos ecuaciones muy sencillas de primer orden. Esto se hará de la siguiente manera. Obsérvese que la ecuación diferencial (1) impone solamente una condición sobre las dos funciones desconocidas $u_1(x)$ y $u_2(x)$. Por lo tanto, se tiene una cierta libertad para seleccionar $u_1(x)$ y $u_2(x)$. El objetivo es imponer una condición adicional sobre $u_1(x)$ y $u_2(x)$ que simplifique la expresión lo más posible. Al calcular

$$\psi'(x) = [u_1y_1' + u_2y_2'] + [u_1'y_1 + u_2'y_2]$$

se ve que $\psi''(x)$ no contiene derivadas de segundo orden de u_1 y u_2 si

$$y_1(x)u_1'(x) + y_2(x) + u_2'(x) = 0 \tag{3}$$

Esto sugiere imponer la condición (3) a las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$. En tal caso se obtiene

$$\begin{aligned} a\psi'' + b\psi' + c\psi &= a[u_1y_1' + u_2y_2']' + b[u_1y_1' + u_2y_2'] + c[u_1y_1 + u_2y_2] \\ &= u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1[ay_1'' + by_1' + cy_1] + u_2[ay_2'' + by_2' + cy_2] \\ &= u_1'y_1' + u_2'y_2' \end{aligned}$$

ya que tanto $y_1(x)$ como $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación homogénea (2). Por lo tanto, $\psi(x) = u_1y_1 + u_2y_2$ es una solución de la ecuación no homogénea (1) si $u_1(x)$ y $u_2(x)$ satisfacen a las dos ecuaciones

$$y_1(x)u_1'(x) + y_2(x)u_2'(x) = 0$$

$$y_1'(x)u_1'(x) + y_2'(x)u_2'(x) = g(x)$$

Multiplicando la primera ecuación por $y_2'(x)$, la segunda por $y_2(x)$ y restándolas luego se obtiene

$$[y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)]u_1'(x) = -g(x)y_2(x)$$

en tanto que multiplicando la primera ecuación por $y_1'(x)$, la segunda por $y_1(x)$ y restándolas luego se tiene,

$$[y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)]u_2'(x) = g(x)y_1(x)$$

Por lo tanto

$$u_1'(x) = \frac{-g(x)y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}, \qquad u_2'(x) = \frac{g(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} \tag{4}$$

Finalmente, $u_1(x)$ y $u_2(x)$ se obtienen al integrar los miembros derechos de (4).

Ejemplo Encontrar una solución particular $\psi(x)$ de la ecuación

$$y'' + y = \tan\ x$$

en el intervalo $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Solución En este caso la ecuación homogénea asociada es

$$y''(x) + y = 0$$

cuya ecuación característica es $r^2 + 1 = 0$ cuyas raices son complejas $\pm i$, donde en el número complejo $\alpha + i\beta$ se tiene $\alpha = 0$ y una solución es $y_1(x) = cos\ x$, $y_2(x) = \text{sen}\ x$ Para hallar u_1 y u_2 tenemos que

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = \cos\ x \cos\ x + \text{sen}\ x\, \text{sen}\ x = 1$$

por lo que

$$u_1'(x) = \frac{-g(x)y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} = \frac{-\tan\ x\ \text{sen}\ x}{1}$$

$$u_2'(x) = \frac{g(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} = \frac{\tan\ x \cos\ x}{1}$$

Ahora integramos

$$u_1(x) = \int u_1'(x)\, dx = \int -\tan\ x\ \text{sen}\ x\, dx = -\int \frac{\text{sen}\ x}{\cos\ x} \text{sen}\ x\, dx = -\int \frac{\text{sen}^2(x)}{\cos\ x} dx = \int \frac{\cos^2(x) - 1}{\cos\ x\ dx}$$

$$= \int \cos\ x\ dx - \int \sec\ x\ dx = \text{sen}\ x - \ln\ |\sec\ x + \tan\ x|$$

$$u_2(x) = \int u_2'(x)\ dx = \int \tan\ x \cos\ x\ dx = \int \frac{\text{sen}\ x}{\cos\ x} \cos\ x\ dx = \int \text{sen}\ x\ dx = -\cos\ x$$

Así que la solución será

$$\psi(x) = u_1y_1 + u_2y_2 = \cos\ x[\text{sen}\ x - \ln\ |\sec\ x + \tan\ x|] + \text{sen}\ x[-\cos\ x] = -\cos\ x\ \ln\ |\sec\ x + \tan\ x|$$

y la solución general

$$y(x) = c_1\ cos\ x + c_2\ \text{sen}\ x - \cos\ x\ \ln\ |\sec\ x + \tan\ x|$$