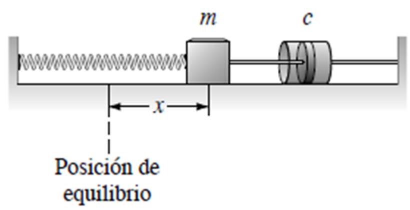
Vibraciones Mecánicas

El movimiento de una masa unida a un resorte sirve como ejemplo relativamente simple de las vibraciones que ocurren en sistemas mecánicos más complicados. Para muchos de estos sistemas, el análisis de estas vibraciones es un problema en la solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Considérese un cuerpo con masa m unido a uno de los extremos de un resorte que resiste la compresión y la tensión, mientras que el otro extremo está sujeto a una pared fija, como se muestra en la figura



Asúmase que el cuerpo descansa en un plano horizontal sin fricción, de tal manera que se puede mover solamente hacia atrás y hacia adelante conforme el resorte se comprime o se estira. Sea x la distancia del cuerpo desde su posición de equilibrio hasta la posición donde el resorte no está estirado. Se considera $x > 0$ cuando el resorte está estirado, y $x < 0$ cuando está comprimido.
De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza de restauración F_S que el resorte ejerce sobre la masa es proporcional a la distancia x cuando el resorte se ha estirado o comprimido. Debido a que es el mismo desplazamiento x de la masa m desde su posición de equilibrio, se concluye que

$$F_S = -kx \tag{1}$$

La constante de proporcionalidad positiva k se conoce como constante del resorte. Nótese que F_S y x tienen signos opuestos: $F_S < 0$ cuando $x > 0$, $F_S > 0$ cuando $x < 0$. La figura muestra la masa unida a un amortiguador dispositivo para mitigar impactos que proporciona una fuerza directamente opuesta a la dirección instantánea de movimiento de la masa m. Supóngase que el amortiguador tiene un diseño tal que esta fuerza F_R es proporcional a la velocidad $v = \dfrac{dx}{dt}$ de la masa; esto es,

$$F_R = -cv = -c\frac{dx}{dt} \tag{2}$$

La constante positiva c es la **constante de amortiguamiento** del amortiguador. Comúnmente se considera la ecuación (2) como una fuerza friccional específica en el sistema (incluyendo la resistencia del aire al movimiento de m).
Si, además de las fuerzas F_S y F_R, la masa está sujeta a una **fuerza externa** dada $F_E = F(t)$, entonces la fuerza total que actúa en la masa es

$$F = F_S + F_R + F_E$$

Utilizando la ley de Newton

$$F = ma = mv' = mx''$$

se obtiene la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$mx'' + cx' + kx = F(t) \tag{3}$$

que gobierna el movimiento de la masa.
Si no existe amortiguador (y se ignoran todas las fuerzas de fricción), entonces se fija $c = 0$ en la ecuación (3) y se le denomina movimiento no amortiguado; el movimiento es amortiguado si $c > 0$. Si no existe fuerza de excitación externa, F(t) se reemplaza con 0 en la ecuación (3). Este caso se conoce como movimiento libre, y como movimiento **forzado** en el caso de que $F(t) \neq 0$. Por tanto, la ecuación homogénea ´

$$mx'' + cx' + kx = 0 \tag{4}$$

describe el movimiento libre de una masa unida a un resorte con amortiguador, pero sin que se le apliquen fuerzas externas.

Movimiento libre no amortiguado Si se tiene una masa con únicamente un resorte, sin amortiguador ni fuerza externa, entonces la ecuación (3) toma la forma simplificada

$$mx'' + kx = 0 \tag{5}$$

Es conveniente definir

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

y reescribir la ecuación (5) como

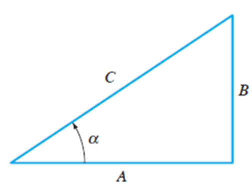
$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \tag{6}$$

La solución general de la ecuación (6) es

$$x(t) = A\cos\ \omega_0\ t + B\,\mathrm{sen}\ \omega_0\ t \tag{7}$$

Para analizar el movimiento descrito por esta solución se escogen las constantes C y a tal que

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos\ \alpha = \frac{A}{C}, \quad \mathrm{sen}\ \alpha = \frac{B}{C} \tag{8}$$



como se indica en la figura. Nótese que aunque $\tan\alpha = \dfrac{B}{A}$, el ángulo α no está dado por la rama principal de la función tangente inversa (la cual solamente proporciona valores en el intervalo $\dfrac{-\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$). En lugar de esto, α es el ángulo entre 0 y $\dfrac{\pi}{2}$ cuyo seno y coseno tienen los signos dados en (8), donde A o B, o ambas, pueden ser negativas. Así

$$\alpha = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) & si \quad A > 0,\ B > 0\ (primer\ cuadrante) \\ \pi + \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) & si \quad A < 0\ (segundo\ o\ tercer\ cuadrante) \\ 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) & si \quad A > 0,\ B < 0\ (cuarto\ cuadrante) \end{cases}$$

Ahora bien de (7) y (8) se tiene

$$x(t) = C\left(\frac{A}{C}\cos\omega_0 t + \frac{B}{C}\operatorname{sen}\ \omega_0 t\right) = C(\cos\ \alpha\cos\omega_0 t + \operatorname{sen}\ \alpha \operatorname{sen}\ \omega_0 t)$$

Con la ayuda de la fórmula aditiva del coseno, se encuentra que

$$x(t) = C\cos\ (\omega_0 t - \alpha)$$

Así, la masa oscila de un lado a otro alrededor de su posición de equilibrio con

1. Amplitud C
2. Frecuencia angular ω_0
3. Ángulo fase α

Tal movimiento se llama movimiento armónico simple.
Si el tiempo t se mide en segundos, la frecuencia angular ω_0 tiene dimensiones de radianes por segundo $\left(\frac{rad}{s}\right)$. El periodo del movimiento es el tiempo requerido para que el sistema realice una oscilación completa, y está dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

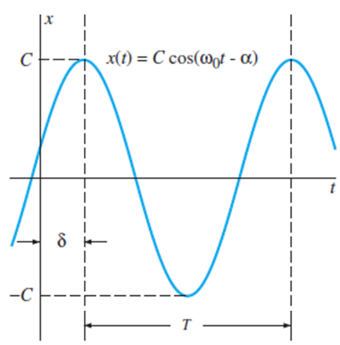
segundos; su frecuencia es

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

en hertz (Hz), la cual mide el número de ciclos por segundo. Nótese que la frecuencia se mide en ciclos por segundo, mientras que la frecuencia angular tiene la dimensión de $\left(\frac{rad}{s}\right)$.
Una gráfica típica de la función de posición armónica simple

$$x(t) = C\cos\ (\omega_0 t - \alpha) = C\cos\left(\omega_0\left(t - \frac{\alpha}{\omega_0}\right)\right) = C\cos(\omega_0(t-\delta)) \tag{9}$$

se muestra en la figura



donde están indicados el significado geométrico de la amplitud C, el periodo T y el tiempo de retardo

$$\delta = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

Si la posición inicial $x(0) = x_0$ y la velocidad inicial $x'(0) = v_0$ de la masa son dados, primero determínese el valor de los coeficientes A y B en la ecuación (7), después obténgase la amplitud C y el ángulo de fase α, llevando a cabo la transformación de x(t) en la forma de la ecuación (9), como se indicó previamente.

Ejemplo Un cuerpo con masa $m = \frac{1}{2}$ kilogramo (kg) está unido en el extremo de un resorte estirado 2 metros (m) debido a una fuerza de 100 newtons (N)y es puesto en movimiento a partir de la posición inicial $x_0 = 1$ (m) y velocidad inicial $v_0 = -5\left(\frac{m}{s}\right)$. (Nótese que estas condiciones iniciales indican que el cuerpo se desplaza a la derecha y a la izquierda en el tiempo $t = 0$). Encuéntrese la función de la posición del cuerpo, así como su amplitud, frecuencia, periodo de oscilación y el tiempo de retardo de su movimiento.

Solución La constante del resorte es $k = \frac{(100N)}{(2m) = 50\left(\frac{N}{m}\right)}$, de tal manera que la ecuación (6) lleva a

$$\frac{1}{2}x'' + 50x = 0$$

esto es;

$$x'' + 100x = 0$$

En consecuencia, la frecuencia angular del movimiento armónico resultante del cuerpo será de $\omega_0 = \sqrt{100} = 10 \left(\frac{rad}{s}\right)$. Por tanto, oscilará con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{10} \approx 0{,}6283\ s$$

y con frecuencia

$$v = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} \approx 1{,}5915\ Hz$$

Si ahora se imponen las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $x'(0) = -5$ en la función de la posición

$$x(t) = A\cos\ 10t + B\,\mathrm{sen}\ 10t$$

y

$$x'(t) = -10\ A\ \mathrm{sen}\ 10t + 10\ B\ \cos\ 10t$$

se obtiene que $A = 1$ y $B = -\frac{1}{2}$. Así, la función de la posición del cuerpo es

$$x(t) = \cos\ 10t - \frac{1}{2}\mathrm{sen}\ 10t$$

Por tanto, la amplitud del movimiento es

$$C = \sqrt{(1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}\ m$$

Para encontrar el tiempo de retardo se escribe

$$x(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\ 10t - \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}\ 10t\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}\cos(10t - \alpha)$$

donde el ángulo de fase α satisface

$$\cos\ \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} > 0 \quad y \quad \operatorname{sen}\ \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} < 0$$

En consecuencia, α es el ángulo en el cuarto cuadrante

$$\alpha = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{-1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}\right) = 2\pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 5{,}8195$$

y el tiempo de retardo del movimiento es

$$\delta = \frac{\alpha}{\omega_0} \approx 0{,}5820\ s$$

Con la amplitud y el ángulo fase aproximado mostrados, la función de la posición del cuerpo toma la forma

$$x(t) = \frac{1}{2}\sqrt{5}\cos(10t - 5{,}8195)$$

Su gráfica se muestra en la figura