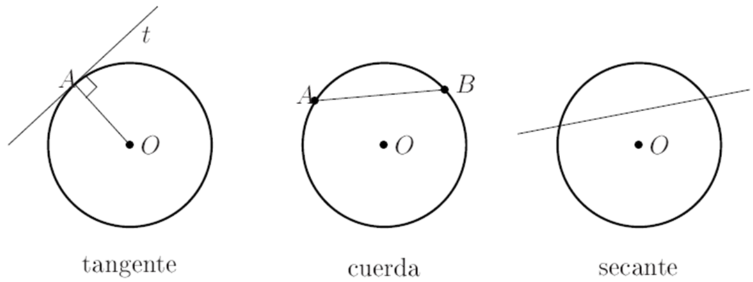
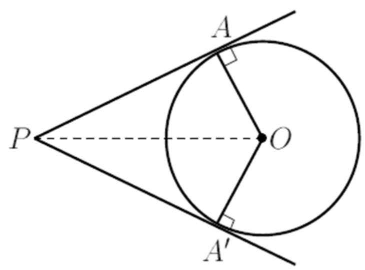
Ángulos inscritos

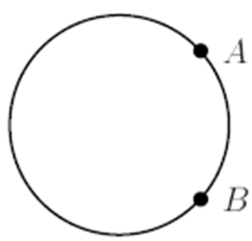
Dada una circunferencia con centro O y radio r, si consideramos el radio OA y una recta t perpendicular al radio en el extremo A, entonces t se conoce como la recta tangente a la circunferencia. A cualquier segmento de recta AB qure tenga sus extremos sobre la circunferencia y no sea diámetro le llamamos cuerda. A una recta que corta a la circunferencia en dos puntos le llamamos secante



Si trazamos dos rectas tangentes a la circunferencia desde un mismo punto P, entonces los segmentos de recta desde P a los puntos de tangencia son iguales y el centro de la circunferencia yace en la bisectriz del ángulo entre las rectas.



Para probar lo anterior, basta observar que los dos triángulos rectángulos PAO y $PA'O$ son congruentes (tienen un cateto igual y la hipotenusa común).
Si tomamos dos puntos A y B sobre una circunferencia, estos determinan dos arcos, ya que, si recorremos la circunferencia en sentido contrario alas manecillas del reloj tendremos los arcos AB y BA.



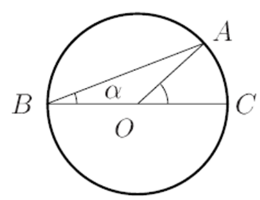
Un ángulo inscrito en una circunferencia es el ángulo formado por dos cuerdas que tienen un extremo común sobre la circunferencia. Los dos extremos no comunes de las cuerdas definen un arco, al que se llama el arco que abre el ángulo inscrito. Un ángulo central es el ángulo formado por dos radios.

ángulo inscrito ángulo central

Teorema 1. *Teorema de la medida del ángulo inscrito La medida de un ángulo inscrito inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, es la mitad del ángulo central que abre el mismo arco*

Demostración. 1. Un lado del ángulo inscrito pasa por el centro de la circunferencia.

Supongamos que $\alpha = \angle\, ABC$ es el ángulo inscrito que pasa por el centro de la circunferencia, O se encuentra sobre BC.



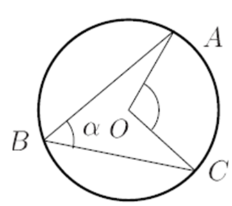
Como el triángulo $\triangle\, ABO$ es isóceles tenemos que

$$\angle\, ABO = \angle\, BAO = \alpha$$

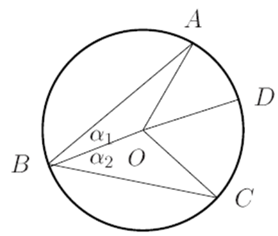
y como la medida del ángulo exterior al vértice O del triángulo $\triangle\, ABO$ es la suma de los otros dos ángulos interiores, entonces

$$\angle\, AOC = 2\alpha$$

2. El centro de la circunferencia es un punto interior del ángulo



Trazamos la cuerda BD que pase por el centro O. El ángulo $\alpha = \angle\, BAC$, queda dividido en dos partes por BD,



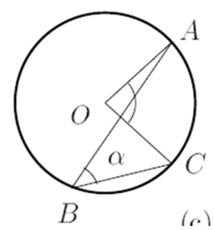
si $\alpha_1 = \angle\, ABD$ y $\alpha_2 = \angle\, DBC$ tenemos por el primer caso

$$\angle\, AOD = 2\alpha_1 \quad y \quad \angle\, DOC = 2\alpha_2$$

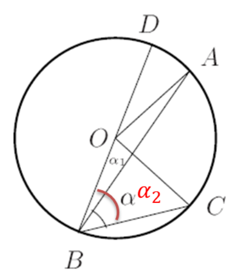
por lo tanto

$$\angle\, AOC = \angle\, AOD + \angle\, DOC = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\alpha$$

3. El centro de la circunferencia es un punto exterior del ángulo



Trazamos el diámetro BD. Si $\alpha_1 = \angle\, ABD$ y $\alpha_2 = \angle\, CBD$



tenemos por un lado

$$\alpha = \angle\, ABC = \alpha_2 - \alpha_1$$

por otro, usando el primer caso, que

$$\angle\, AOD = 2\alpha_1 \quad y \quad \angle\, COD = 2\alpha_2$$

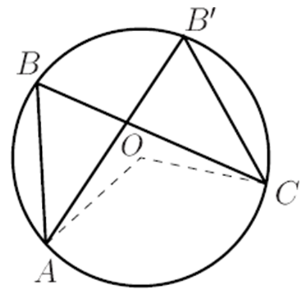
luego

$$\angle\, COA = \angle\, COD - \angle\, AOD = 2\alpha_2 - 2\alpha_1 = 2\alpha$$

□

Corolario 1. *Todos los ángulos inscritos que abren un mismo arco tienen la misma medida.*

Demostración. Sean $\angle\, ABC$ y $\angle\, AB'C$ dos ángulos inscritos que abren un mismos arco



Según el resultado anterior

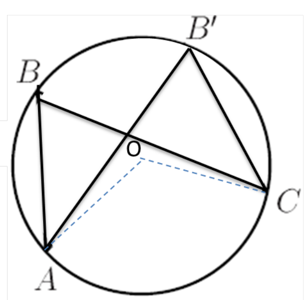
$$\angle\, ABC = \angle\, AB'C = \frac{1}{2}\,\angle\, AOC$$

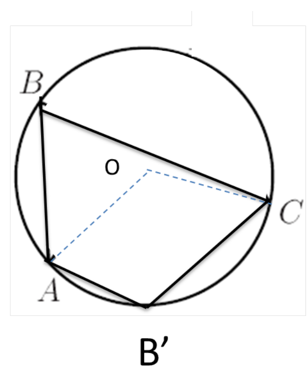
□

Corolario 2. *Sean A y C dos puntos fijos sobre una circunferencia. Para cualesquiera dos puntos B y B' de la circunferencia se tiene que:*

$$\angle\, ABC = \angle\, AB'C \quad \text{ó} \quad \angle\, ABC \;\; y \;\; \angle\, AB'C \;\; son \;\; suplementarios$$

Demostración. Si B y B' se encuentran en el mismo arco, los ángulos inscritos son iguales a la mitad del ángulo central $\angle\, AOC$.





Si B y B' están en arcos diferentes, se tiene que

$$\angle\, ABC + \angle\, AB'C = \frac{1}{2}(\angle\, AOC + \angle\, COA) = 180°$$

□

Corolario 3. *Sean A y C dos puntos fijos, el conjunto de puntos B que cumplen que $\angle\, ABC$ es un ángulo recto es una circunferencia de diámetro AC.*