## Subespacios Vectoriales Generados por un Conjunto de Vectores

**Definición 1.** *Sea $V$ un espacio vectorial. Sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores de $V$. Se dice que el vector $v \in V$ es una combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_n$, si existen escalares $c_1, \ldots, c_n$ tales que*

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

**Ejemplo** El vector $(14, 12, 2)$ en $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores $(1, 2, -1)$ y $(3, 2, 1)$ puesto que

$$(14, 12, 2) = 2(1, 2, -1) + 4(3, 2, 1)$$

Al conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de los elementos de un subconjunto $S \subset V$ lo denotamos $\pounds(S)$. Entonces

$$\pounds(S) = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n \mid c_i \in \mathbb{R}, v_i \in S,\ i = 1, ..., k,\ k \in \mathbb{N}\}$$

**Teorema 1.** *Sea $V$ un espacio vectorial, y sean $v_1, v_2, ..., v_n$, $n$ vectores de $V$. Entonces el conjunto*

$$\pounds(v_1, v_2, ..., v_n) = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n \mid c_i \in \mathbb{R}, v_i \in S,\ i = 1, ..., k,\ k \in \mathbb{N}\}$$

*es un subespacio de $V$*

*Demostración.* Sean $x, y \in \pounds(v_1, v_2, ..., v_n)$. Entonces existen $c_1, ..., c_n$ y $d_1, ..., d_n$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$x = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$$
$$y = d_1 v_1 + \ldots + d_n v_n$$

Tenemos entonces que

$$x + y = c_1 v_1 + \ldots c_n v_n + d_1 v_1 + \ldots d_n v_n = (c_1 + d_1) v_1 + \ldots + (c_n + d_n) v_n$$

lo que demuestra que $x + y \in \pounds(v_1, v_2, ..., v_n)$
En forma similar, si $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\lambda x = \lambda(c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n) = (\lambda c_1) v_1 + \ldots + (\lambda c_1) v_1 + \ldots + (\lambda c_n) v_n$$

lo que prueba que $\lambda x\ \in \pounds(v_1, v_2, ..., v_n)$. Entonces, $\pounds(v_1, v_2, ..., v_n)$ es un subespacio de V.
Dado que

$$v_i = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 1 \cdot v_i + \ldots + 0 \cdot v_n$$

entonces los vectores $v_i \in \pounds(v_1, v_2, ..., v_n)$ □

Sea $W$ un subespacio de V que contiene a $v_1, ..., v_n$ y sea $x = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n \in \pounds(v_1, v_2, ..., v_n)$. Por ser W un subespacio de V se tiene que $x \in W$. Es decir $\pounds(v_1, v_2, ..., v_n) \subset W$. Esto demuestra que $\pounds(v_1, v_2, ..., v_n)$ es el menor de los subespacios de V que contiene a $v_1, ..., v_n$

**Definición 2.** *Sea $V$ un espacio vectorial y sean $v_1, ..., v_n$ vectores de $V$. Al subespacio $\pounds(v_1, v_2, ..., v_n)$ se le llama subespacio generado por los vectores $v_1, ..., v_n$*

**Ejemplo** Sean $v_1 = (1, 3, -1)$ y $v_2 = (2, 1, 3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$ se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \pounds(v_1, v_2) &= \{c_1(1, 3, -1) + c_2(2, 1, 3) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(c_1 + 2c_1, 3c_1 + c_2, -c_1 + 3c_2) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \mid x = (c_1 + 2c_1,\ y = 3c_1 + c_2,\ z = -c_1 + 3c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

En otros términos, se tiene de la última expresión

$$\begin{aligned} x &= c_1 + 2c_1 \\ y &= 3c_1 + c_2 \\ z &= -c_1 + 3c_2 \end{aligned}$$

que puede contemplarse como un sistema de tres ecuaciones con dos incognitas $c_1,\ c_2$ el cual tiene solución. Ahora bien al aplicarle el método de eliminación Gaussiana

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & 1 & y \\ -1 & 3 & z \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -5 & y - 3x \\ 0 & 0 & -2x + y + z \end{bmatrix}$$

Entonces el hecho de la existencia de soluciones del sistema es equivalente a que $-2x + y + z = 0$. Es decir, el vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ es una combinación lineal de $v_1 = (1, 3, -1)$ y $v_2 = (2, 1, 3)$ si, y solo si $-2x + y + z = 0$. Por lo tanto, el subespacio $\pounds(v_1, v_2)$ puede ser descrito como

$$\pounds(v_1, v_2) = \{(x, y, z) \mid -2x + y + z = 0\}$$

que es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ que representa geométricamente un plano que pasa por el origen

## Bases y Dimensión

**Definición 3.** *Sea $V$ un espacio vectorial. Se dice que el subconjunto $S$ de $V$ es una base de $V$ si*
*(a) $S$ genera a $V$*
*(b) $S$ es linealmente independiente*

**Ejemplo** Los vectores $v_1 = (3, 1, -1)$, $v_2 = (4, 1, 1)$ y $v_3 = (1, 2, 3)$ constituyen una base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.
En efecto pues si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $v_1,\ v_2,\ v_3$, es decir existen escalares $c_1,\ c_2,\ c_3$ tales que

$$(x, y, z) = c_1(3, 1, -1) + c_2(4, 1, 1) + c_3(1, 2, 3)$$

Al realizar las operaciones indicadas e igualando las correspondientes coordenadas de los vectores involucrados se obtiene

$$\begin{aligned} 3c_1 + 4c_2 + c_3 &= x \\ c_1 + c_2 + 2c_3 &= y \\ -c_1 + c_2 + 3c_3 &= z \end{aligned}$$

éste es un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas cuyo determinante es

$$\det \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

por lo que el sistema tiene una única solución, por lo que los vectores $v_1,\ v_2,\ v_3$ generan $\mathbb{R}^3$

**Definición 4.** *La dimensión de un espacio vectorial es el número de elementos de una base del espacio*

**Ejemplo** Los vectores $v_1 = (3, 1, -1)$, $v_2 = (4, 1, 1)$ y $v_3 = (1, 2, 3)$ constituyen una base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

El conjunto generado por éstos vectores es:

$$\pounds(v_1, v_2) = \{(x, y, z) \mid -2x + y + z = 0\}$$

Es decir, el plano contenido en $\mathbb{R}^3$

$$2x + y + z = 0$$

Como el número de vectores de la base que lo generan es dos, entonces la dimensión del plano generado es 2