Geometría Euclidiana

Geometría Griega En el principio, la geometría era una colección de reglas de uso común para medir y construir casas y ciudades. No fue hasta el año 300 a.C. que Euclides de Alejandría, en sus Elementos, ordenó y escribió todo ese saber, imprimiéndole el sello de rigor lógico que caracteriza y distingue a las matemáticas. Se dio cuenta de que todo razonamiento riguroso (o demostración) debe basarse en ciertos principios previamente establecidos ya sea, a su vez, por otra demostración o bien por convención. Pero a final de cuentas, este método conduce a la necesidad ineludible de convenir en que ciertos principios básicos (postulados o axiomas) son válidos sin necesidad de demostrarlos, que están dados y son incontrovertibles para poder construir sobre ellos el resto de la teoría. Lo que hoy se conoce como Geometría Euclidiana, y hasta hace dos siglos simplemente como Geometría, está basada en los cinco postulados de Euclides:

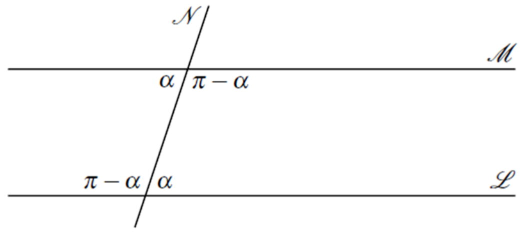
1. Por cualesquiera dos puntos, se puede trazar el segmento de recta que los une.
2. Dados un punto y una distancia, se puede trazar el círculo con centro en el punto y cuyo radio es la distancia.
3. Un segmento de recta se puede extender en ambas direcciones indefinidamente.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Dadas dos rectas y una tercera que las corta, si los ángulos internos de un lado suman menos de dos ángulos rectos, entonces las dos rectas se cortan y lo hacen de ese lado.

De estos postulados o axiomas, el quinto es el más famoso pues se creía que podría deducirse de los otros. Es más sofisticado, y entonces se pensó que debía ser un teorema, es decir, ser demostrable. De hecho, un problema muy famoso fue ése: demostrar el quinto postulado usando únicamente los otros cuatro. Y muchísimas generaciones de matemáticos lo atacaron sin éxito. No es sino hasta el siglo XIX, y para sorpresa de todos, que se demuestra que no se puede demostrar; que efectivamente hay que suponerlo como axioma, pues negaciones de él dan origen a "nuevas geometrías", tan lógicas y bien fundamentadas como la euclidiana.
La publicación de la "Géométrie" de Descartes marca una revolución en las matemáticas. La introducción del álgebra a la solución de problemas de índole geométrico desarrolló una nueva intuición y, con ésta, un nuevo entender de la naturaleza de las "lignes courves". Para comprender lo que hizo René Descartes (1596—1650), se debe tener más familiaridad con el quinto postulado. Además del enunciado original, hay otras dos versiones que son equivalentes:

1. Dada una línea recta y un punto fuera de ella, existe una única recta que pasa por el punto y que es paralela a la línea.
2. Los ángulos interiores de un triángulo suman dos ángulos rectos.

De las tres versiones que hemos dado del quinto postulado de Euclides, usaremos
Dada una línea recta y un punto fuera de ella, existe una única recta que pasa por el punto y que es paralela a la línea.

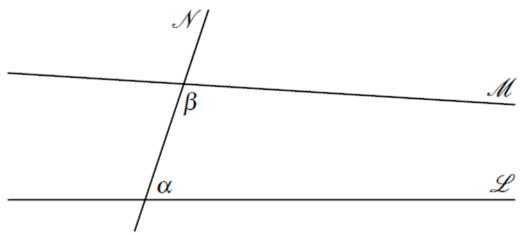
Axioma de las paralelas Si una línea recta cruza dos líneas rectas que no se intersectan entonces los ángulos interiores suman dos rectos



En teste caso

$$\alpha+\beta=\alpha+\pi-\alpha=\pi$$

Axioma de las paralelas Si una línea recta cruza dos líneas rectas que se intersectan entonces los ángulos interiores suman menos de dos rectos



En teste caso

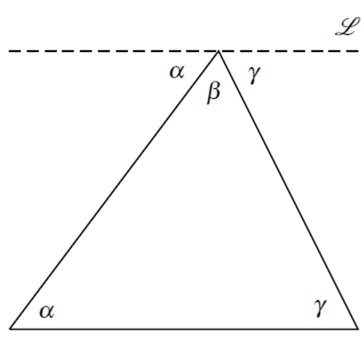
$$\alpha+\beta \quad <\pi$$

Suma de los ángulos internos de un triángulo

Proposición 1. *Si α, β y γ son los ángulos de un triángulo, entonces*

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

Demostración. Dado un triángulo dibujamos una recta L sobre uno de los vértices y paralela al lado opuesto



Entonces el ángulo a la izquierda debajo de L es alterno al ángulo α en el triángulo, por lo que es igual a α. Del mismo modo, el ángulo a la derecha debajo de L es igual a γ. Pero entonces el ángulo π debajo de L es igual a $\alpha + \beta + \gamma$ y por lo tanto

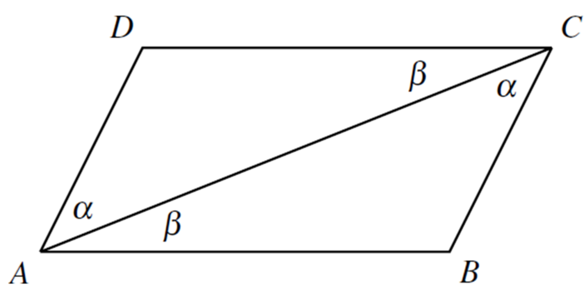
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

□

Criterios de Congruencia

1. Criterio (LAL) Dos triángulos que tienen dos lados y el ángulo entre ellos iguales son congruentes.
2. Criterio (ALA)Dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales son congruentes.
3. Criterio (LLL) Dos triángulos con tres lados iguales son congruentes

Proposición 2. *Lados opuestos de un paralelogramo son iguales.*



Demostración. Dado el paralelogramo ABCD, dividimos éste en dos triángulos por la diagonal y vamos a probar que estos triángulos son congruentes

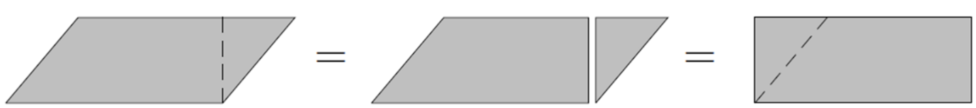
1. Los triángulos tienen un lado común AC
2. Sus ángulos correspondientes α son iguales, siendo ángulos internos alternos por los lados paralelos AD y BC
3. Sus ángulos correspondientes β son iguales, siendo ángulos internos alternos por los lados paralelos AB y DC

$\therefore$ los triángulos son congruentes por criterio ALA, y en particular se tiene

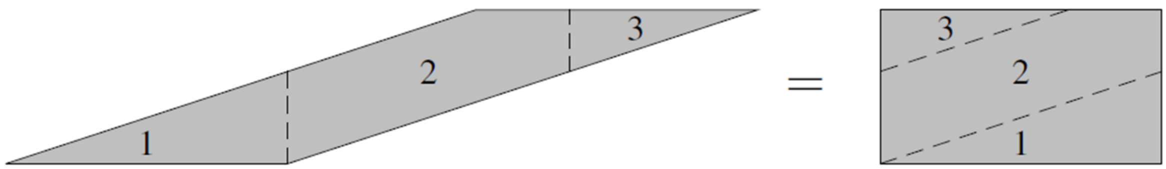
$$|AB| = |DC| \quad y \quad |AD| = |BC|$$

entre los lados correspondientes. Pero estos también son los lados opuestos del paralelogramo □

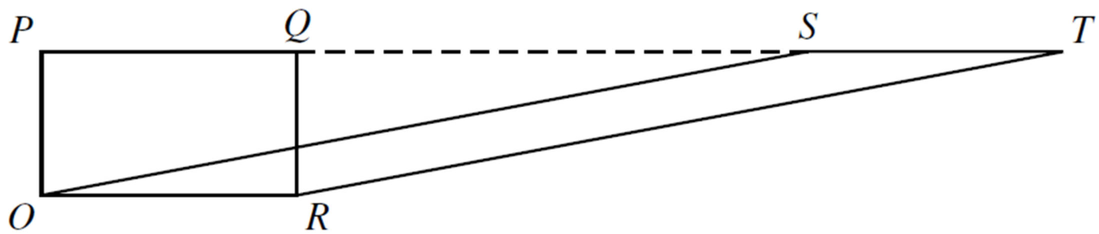
La primera región no rectangular que se puede mostrar igual a un rectángulo en el sentido de Euclid es un paralelogramo.
La figura muestra cómo usar directamente líneas para cortar un paralelogramo en piezas que se pueden volver a ensamblar para formar un rectángulo.



pero se necesitan más cortes necesario si el paralelogramo está como en la Figura.



El número de cortes puede llegar a ser arbitrariamente grande, ya que el paralelogramo es esquilado aún más. Podemos evitar un gran número de cortes al permitir la resta de piezas, así como la adición. La Figura muestra cómo convertir cualquier rectángulo a cualquier paralelogramo con la misma base O y la misma altura OP. Solo necesitamos agregar un triángulo y luego restar un triángulo igual.



Para ser precisos, si comenzamos con el rectángulo OPQR y agregamos el triángulo RQT, luego reste el triángulo OPS (que es igual al triángulo RQT por ser lados del paralelogramo), el resultado es paralelogramo OSTR.
Así, el paralelogramo es igual (en área) a un rectángulo con la misma base y altura. Escribimos este hecho como

$$\textit{área del paralelogramo} \;=\; \textit{base} \;\times\; \textit{altura}$$

Tarea Moral Encontrar el área de un triángulo ABC