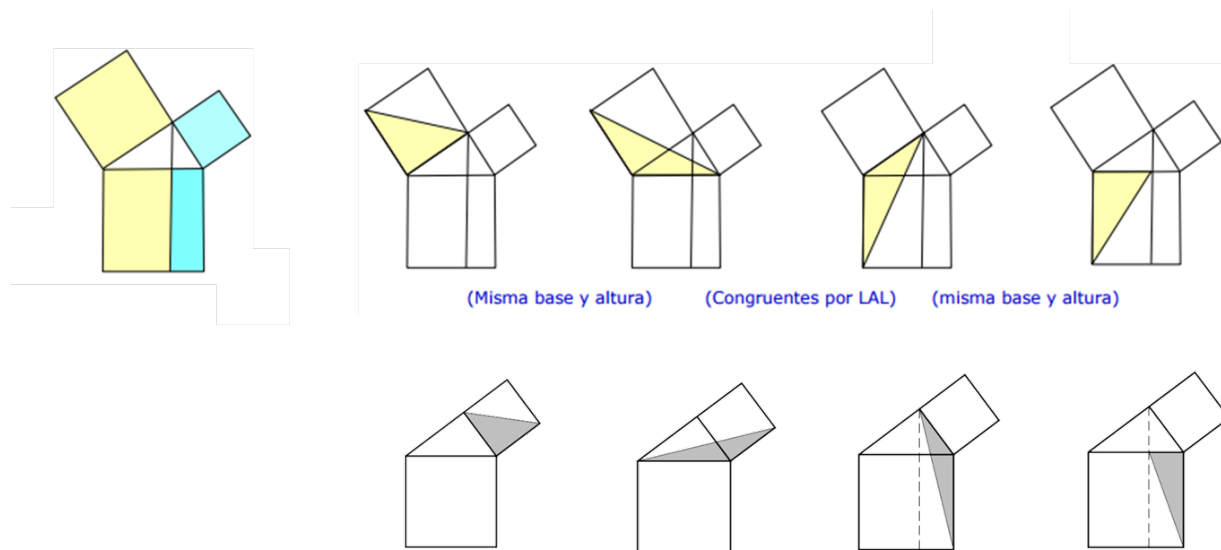


Geometría Euclidiana

Proposición 1. Teorema de Pitágoras

En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

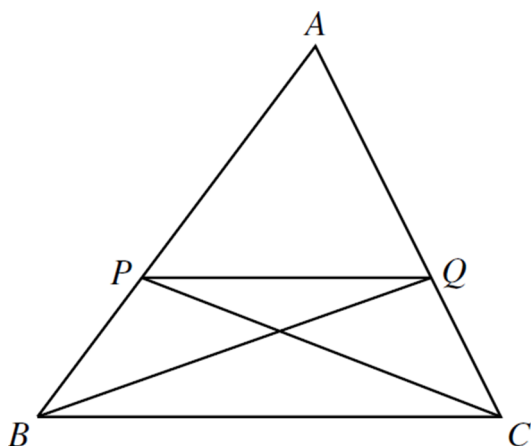
Demostración. Basta ver que los las áreas de los cuadrados son iguales a las áreas de los rectángulos:



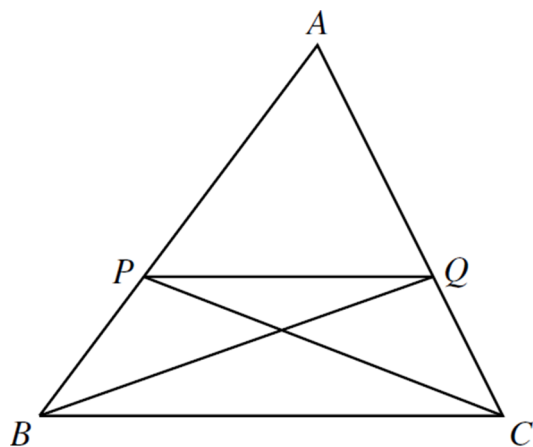
Para esto basta mostrar que los cuatro triángulos tienen áreas iguales: □

Teorema 1. Teorema de Thales

Una línea dibujada paralela a un lado de un triángulo corta los otros dos lados proporcionalmente.



Demostración. considerando el triángulo ABC, con sus lados AB y AC cortado por la PQ paralela al lado BC. Porque PQ es paralelo a BC, los triángulos PQB y PQC en la base PQ tienen la misma altura, es decir la distancia entre los paralelos. Por lo tanto, tienen la misma área. Si agregamos el triángulo APQ a cada uno de los triángulos de área igual PQB y PQC, obtenemos los triángulos AQB y APC, respectivamente. Por lo tanto, los últimos triángulos también son iguales en área. □



bases están en la proporción de sus áreas:

$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{\text{área } APQ}{\text{área } PQB}$$

Del mismo modo, teniendo en cuenta los triángulos APQ y PQC que forman el triángulo APC, encontramos que

$$\frac{|AQ|}{|QC|} = \frac{\text{área } APQ}{\text{área } PQC}$$

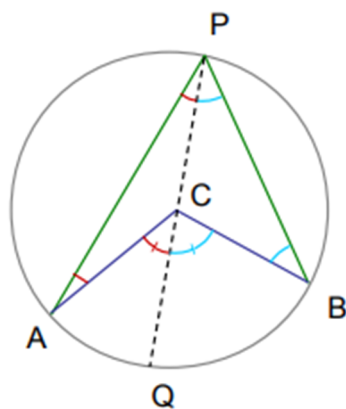
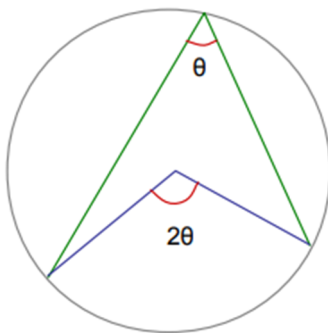
Debido a que el área PQB es igual al área PQC, el lado derecho de estas dos ecuaciones son iguales, y también lo son sus lados izquierdos. Es decir,

$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|AQ|}{|QC|}$$

En otras palabras, la línea PQ corta los lados AB y AC proporcionalmente. $\square$

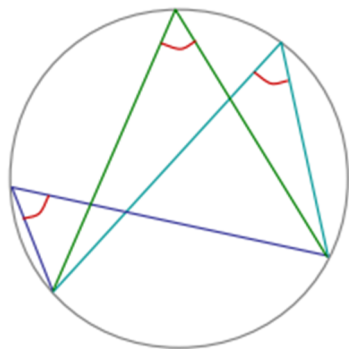
Demostración. Ahora considere los dos triángulos, APQ y PQB, que forman el triángulo AQB como triángulos con bases en la línea AB. Ellos tienen la misma altura relativo a esta base (es decir, la distancia perpendicular de Q de AB). Por lo tanto, sus

Proposición 2. *Un ángulo inscrito en un círculo es la mitad del ángulo central.*



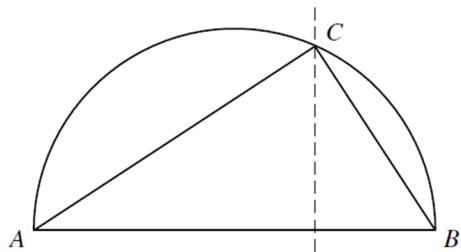
Demostración. Como ACP es isósceles entonces $\angle CAP = \angle APC$. Como la suma de los ángulos internos es 180° entonces $\angle ACP = 180^\circ - 2\angle CAP$ y como $\angle ACP + \angle ACQ = 180^\circ$ entonces $\angle ACQ = 2\angle CAP$. De manera análoga $\angle BCQ = 2\angle CBP$. Sumando los ángulos se obtiene $\angle ACB = 2\angle APB$. $\square$

Proposición 3. *En un círculo, los ángulos inscritos que ven el mismo arco son iguales entre sí.*



Demostración. Todos los ángulos inscritos que ven el mismo arco son iguales a la mitad del mismo ángulo central. $\square$

Teorema 2. *Si A y B son los extremos de un diámetro de un círculo y C es cualquier punto en el semicírculo, entonces el ángulo $\angle ACB$ es recto*



Demostración. De acuerdo con la figura y según el resultado anterior, $\angle ACB = \pi$ y por tanto

$$\angle ACB = \frac{\pi}{2}$$

$\square$