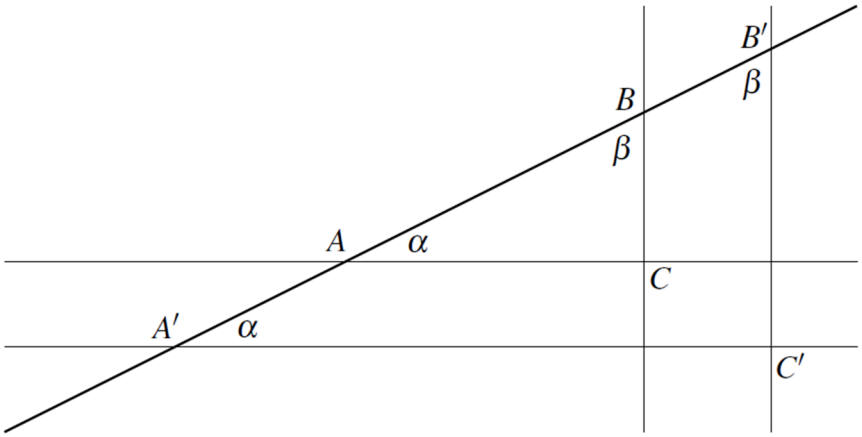
Líneas y sus ecuaciones Una de las consecuencias más importantes de el axioma de las paralelas es el teorema de Tales y, por lo tanto, la proporcionalidad de triángulos semejantes. Cuando se introducen las coordenadas, esto nos permite definir la propiedad de líneas rectas conocida como pendiente. El valor de la pendiente no depende de qué dos puntos se consideren en el plano



Los ángulos marcados α son iguales porque AC y $A'C'$ son paralelos, y los ángulos marcados con β son iguales porque BC y $B'C'$ son paralelos También el ángulos en C y C' ambos son ángulos rectos.
Por lo tanto, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, y por lo tanto su correspondiente los lados son proporcionales En particular,

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|A'C'|}$$

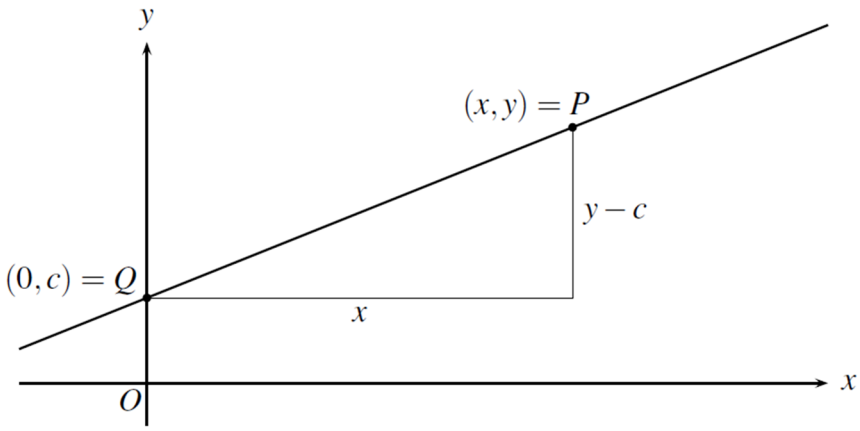
es decir, pendiente = constante.
Ahora supongamos que se nos da una línea de pendiente a que cruza el eje y en el punto Q donde y = c . Si $P = (x, y)$ es cualquier punto en esta línea, entonces en vertical de Q a P es y-c y en horizontal es x. Por lo tanto

$$pendiente \ = \ \frac{y-c}{x}$$

y por lo tanto, multiplicando ambos lados por x, se tiene $y - c = ax$, es decir,

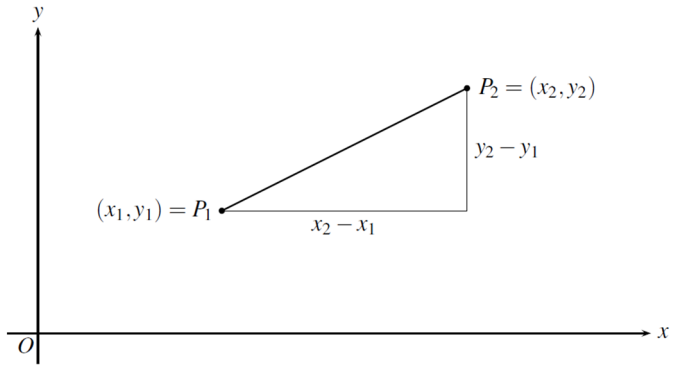
$$y = ax + c$$

Esta ecuación se cumple en todos los puntos de la línea, y solo en ellos, por lo que la llamamos la ecuación de la línea.



Casi todas las líneas tienen ecuaciones de esta forma; las únicas excepciones son líneas que no cruzan el eje y Estas son las líneas verticales, que también no tienen una pendiente como la hemos definido, aunque podríamos decir que tienen pendiente infinita Tal línea tiene una ecuación de la forma $x = c$, para alguna constante c.
Por lo tanto, todas las líneas tienen ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$, para algunas constantes a, b y c, llamado ecuación lineal en las variables x y y.

Distancia Introducimos el concepto de distancia o longitud en el plano numérico $\mathbb{R}^2$.
Supongamos que $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ son dos puntos cualquiera en $\mathbb{R}^2$. Luego se deduce del significado de coordenadas que hay un triángulo rectángulo como se muestra en la Figura, y que $|P_1P_2|$ es la longitud de su hipotenusa.



El lado vertical del triángulo tiene la longitud $y_2 - y_1$, y el horizontal el lado tiene una longitud $x_2 - x_1$. Luego se sigue del teorema de Pitágoras que

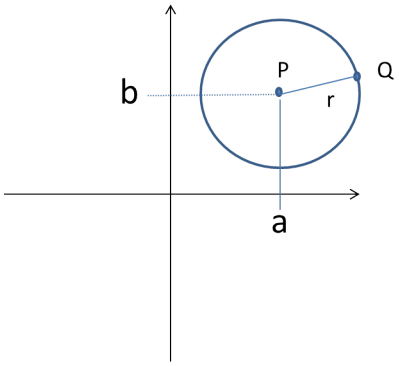
$$|P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

y entonces

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Por lo tanto, definimos la distancia $|P_1P_2|$ entre dos puntos P_1 y P_2 por la fórmula anterior.

Ecuación del Circulo La fórmula de distancia conduce inmediatamente a la ecuación de un círculo, como sigue:
Supongamos que tenemos un círculo con radio r y centro en el punto $P = (a, b)$.



Entonces cualquier punto $Q = (x, y)$ en el círculo está a la distancia r de P, y por lo tanto, la fórmula de la distancia nos da:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Al elevar ambos lados al cuadrado tenemos

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Llamamos a esta la ecuación del círculo porque está satisfecha con cualquier punto (x, y) en el círculo, y solo por dichos puntos.

La línea equidistante de dos puntos Un círculo es el conjunto de puntos equidistantes de un punto: su centro.
Tambien es natural preguntar: ¿Cuál es el conjunto de puntos equidistantes de dos puntos en $\mathbb{R}^2$?
Respuesta: El conjunto de puntos equidistantes de dos puntos es una línea.
Para ver por qué, sean los dos puntos $P_1 = (a_1, b_1)$ y $P_2 = (a_2, b_2)$. Entonces un punto $P = (x, y)$ es equidistante de P_1 y P_2 si $|PP_1| = |PP_2|$, es decir, si x y y satisfacen la ecuación

$$\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2} = \sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos lados de esta ecuación, obtenemos

$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2$$

Expandiendo se tiene

$$x^2 - 2a_1x + a_1^2 + y^2 - 2b_1y + b_1^2 = x^2 - 2a_2x + a_2^2 + y^2 - 2b_2y + b_2^2$$

simplificando nos queda

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + (b_1^2 - b_2^2) = 0$$

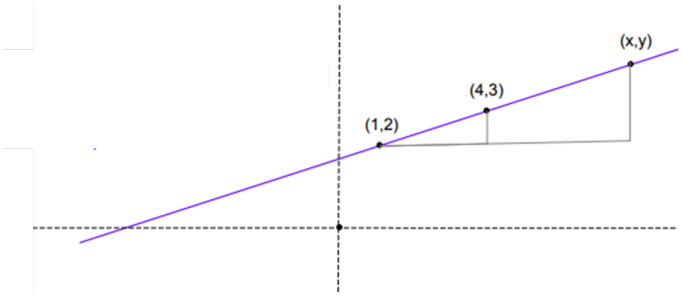
Por lo tanto, los puntos $P = (x, y)$ equidistantes de P_1 y P_2 forman una línea.

Ahora que las líneas y los círculos están definidos por ecuaciones, podemos encontrar nuevos puntos como intersecciones de líneas y círculos, intersecciones de líneas e intersecciones de circulos.

Ecuaciones y Curvas Las lineas y curvas pueden describirse por medio de las relaciones entre las coordenadas de sus puntos, lo que da ecuaciones para las curvas:

Ejemplo Para los puntos del plano alineados con $(1,2)$ y $(4,3)$ se tiene, por la semejanza de triángulos:

$$\begin{aligned} \frac{y-2}{x-1} &= \frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3} \\ 3(y-2) &= 1(x-1) \\ -x+3y &= 5 \end{aligned}$$



Así que los puntos de la recta que pasa por $(1,2)$ y $(4,3)$ satisfacen la ecuación $-x+3y=5$

Ejemplo Los puntos (x,y) del plano que están en el círculo con centro en $(1,2)$ y que pasa por $(4,3)$ satisfacen la ecuación

$$(x-1)^2+(y-2)^2=(4-1)^2+(3-2)^2$$

que puede simplificarse a $x^2+y^2-2x-4y=5$