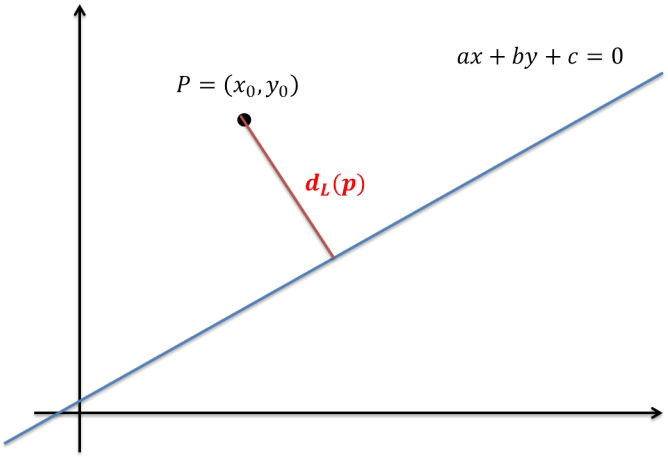
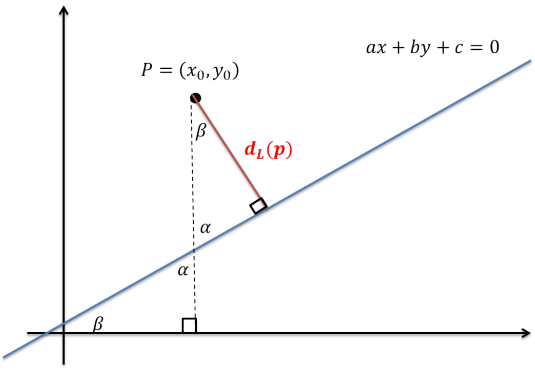
Distancia de un punto a una recta La distancia entre un punto y una recta es la perpendicular entre el punto y el pie de la perpendicular que llega a la recta desde el punto



Procedimiento por semejanza de triángulos



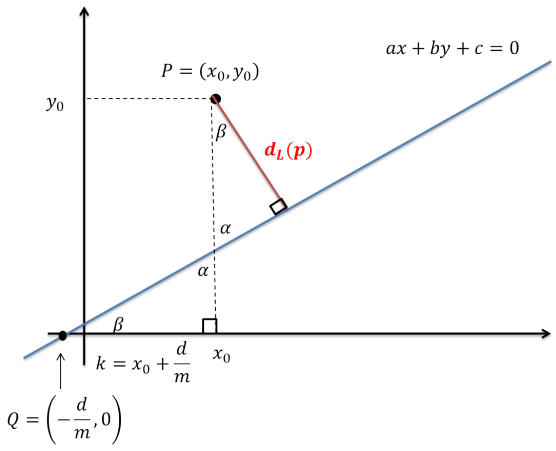
1. Se traza una perpendicular a la recta que pase por P
2. Se traza una paralela al eje Y desde P
3. Los triángulos que se forman son semejantes
4. Si en la ecuación de la recta despejamos Y se tiene

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

y hacemos

$$m = -\frac{a}{b} \quad y \quad d = -\frac{c}{b}$$

se tiene entonces $y = mx + d$



1. En la ecuación de la recta se tiene que si $y = 0$ entonces

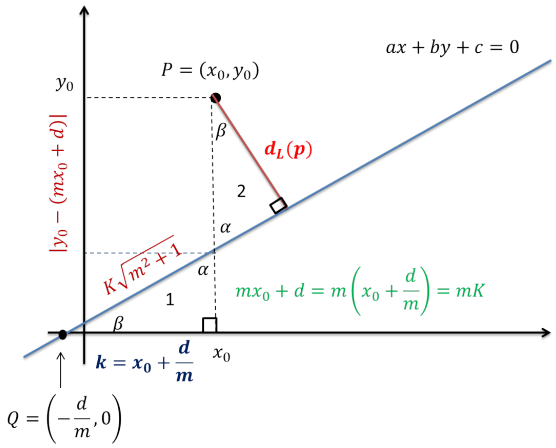
$$0 = mx + d \;\Rightarrow\; mx = -d \;\Rightarrow\; x = -\frac{d}{m}$$

y llamamos Q al punto

$$Q = \left(-\frac{d}{m}, 0\right)$$

2. Si llamamos K a la distancia de Q a x_0 se tiene

$$d(Q, x_0) = \sqrt{\left(x_0 + \frac{d}{m}\right)^2} = \left|x_0 + \frac{d}{m}\right|$$



1. En el triángulo 1 por pitágoras la hipotenusa vale

$$\sqrt{K^2 + (mK)^2} = K\sqrt{m^2 + 1}$$

2. Y el cateto opuesto al ángulo β vale

$$y = mx_0 + d \;\Rightarrow\; y = m\left(x_0 + \frac{d}{m}\right) \;\Rightarrow\; y = mK$$

3. En el triángulo 2 la hipotenusa vale

$$|y_0 - (mx + d)|$$

Por semejanza de triángulos 1 y 2 se tiene

$$\frac{d_L(p)}{|y_0 - (mx + d)|} = \frac{K}{K\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\Rightarrow d_L(p) = \frac{|y_0 - (mx_0 + d)|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{\left|y_0 - \left(-\frac{a}{+}bx_0 - \frac{c}{b}\right)\right|}{\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)^2 + 1}}$$

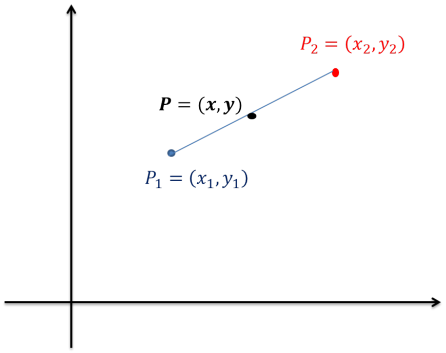
$$= \frac{\frac{|by_0 ax_0 + c)|}{|b|}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|b|}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Por lo tanto la distancia de un punto $P = (x_0, y_0)$ a la recta $ax + by + c = 0$ es $d_L(P) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

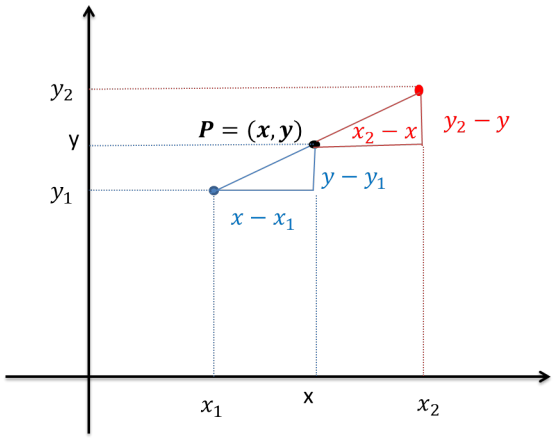
División de un Segmento en una Razón Dada Si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ son los extremos de un segmento P_1P_2, las coordenadas (x, y) de un punto P que divide a este segmento en la razón dada r son

$$x = \frac{rx_2 + x_1}{1 + r} \quad y \quad y = \frac{ry_2 + y_1}{1 + r}$$

Demostración. Dado un segmento que une los puntos P_1 y P_2 y un punto P sobre este



Trazando paralelas a los ejes se tienen dos triángulos semejantes



por lo tanto se tiene

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x}{y_2 - y} \Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Para una razón dada se tiene

$$\begin{aligned}\frac{x-x_1}{x_2-x} = r \Rightarrow x - x_1 &= r(x_2 - x)\\ \Rightarrow\ x - x_1 &= rx_2 - rx\\ \Rightarrow\ rx + x &= rx_2 + x_1\\ \Rightarrow\ x(r+1) &= rx_2 + x_1\\ \Rightarrow\ x &= \frac{rx_2 + x_1}{r+1}\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}\frac{y-y_1}{y_2-y} = r \Rightarrow y - y_1 &= r(y_2 - y)\\ \Rightarrow\ y - y_1 &= ry_2 - ry\\ \Rightarrow\ ry + y &= ry_2 + y_1\\ \Rightarrow\ y(r+1) &= ry_2 + y_1\\ \Rightarrow\ y &= \frac{ry_2 + y_1}{r+1}\end{aligned}$$

□

Si la razon $r = 1$ se tienen las fórmulas del punto medio

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2} \quad y \quad y = \frac{y_2 + y_1}{2}$$