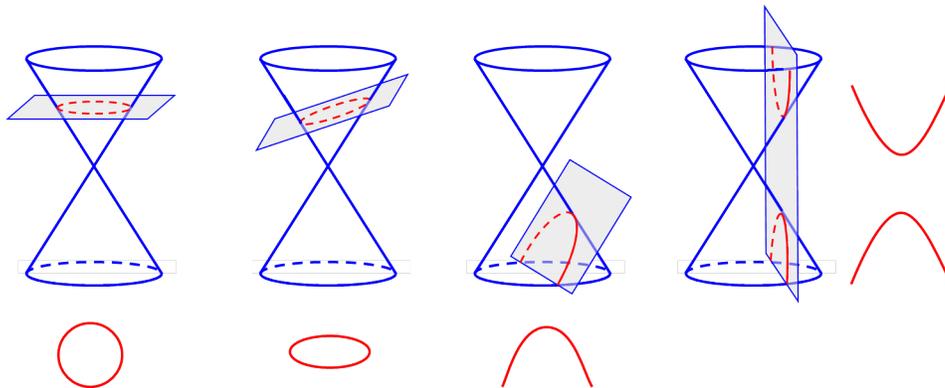


Las curvas llamadas cónicas son importantes desde muchos puntos de vista. Desde un punto de vista práctico, sirven para aproximar pequeños trozos de curvas complicadas con un grado de aproximación mayor que el de la recta tangente en uno de los puntos.

Desde un punto de vista algebraico, sus ecuaciones siguen a las de las rectas porque son ecuaciones de segundo grado en dos variables.

Finalmente, tienen aplicaciones en la Física, tanto en el estudio del tiro parabólico como en el de la trayectoria de los planetas, y poseen una propiedad que da lugar a un gran número de aplicaciones, la propiedad focal, gracias a la cual existen las antenas parabólicas.

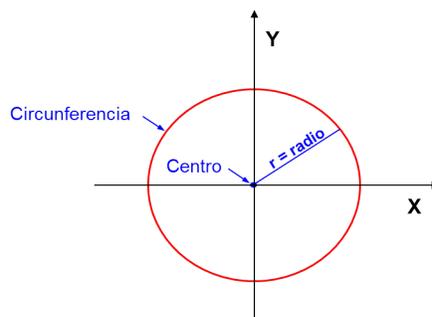
Una sección cónica es la intersección de un plano y un cono. Cambiando el ángulo y el lugar de la intersección, podemos crear un círculo, un elipse, una parábola o una hipérbola; o en el caso especial cuando el plano se pone en contacto con el vértice: un punto, una línea o 2 líneas intersectadas.



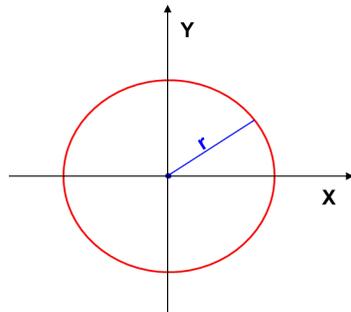
Cónicas, definición y nomenclatura

Circunferencia Es el conjunto de todos los puntos sobre un plano que son equidistantes de un punto fijo sobre el plano. El punto fijo se llama centro y la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia se llama radio.

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (h, k)) = r\}$$

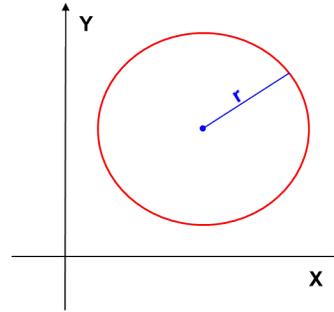


Las ecuaciones dependiendo del centro (h, k) son



C (0, 0)

$$x^2 + y^2 = r^2$$



C (h, k)

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

que en forma general son

C (0, 0)

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

C (h, k)

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

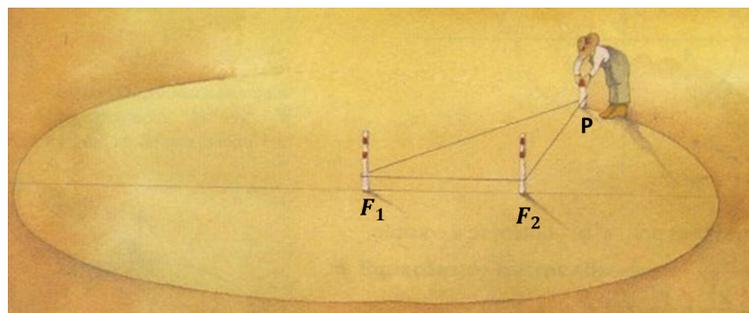
$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ecuación en Forma General

Elipse Si fijamos dos estacas en el piso y tomamos un trozo de cuerda de longitud mayor que la distancia que separa las estacas, al tensar la cuerda con un lápiz y deslizar el lápiz sobre el piso se dibuja una elipse



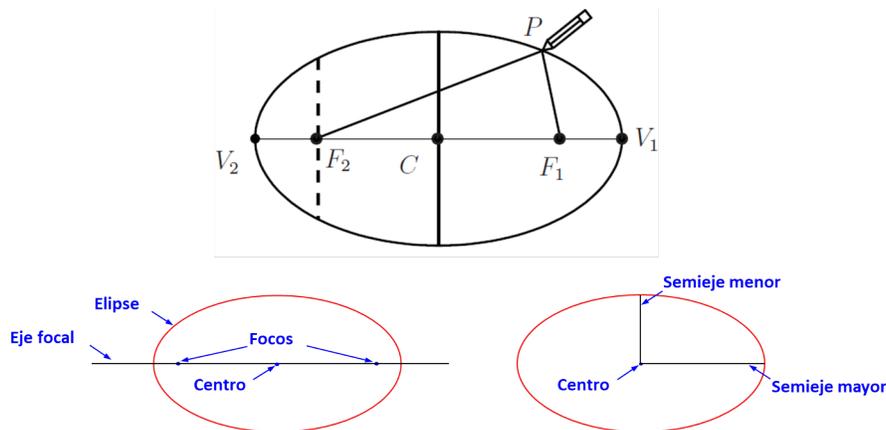
Como la cuerda se ha mantenido tensa, la suma de las distancias del punto P a cada uno de los puntos marcados con F_1 y F_2 es constante: la longitud de la cuerda.

Definición 1. Una elipse es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la suma de sus

distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante denotada con $2a$. En símbolos escribimos

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

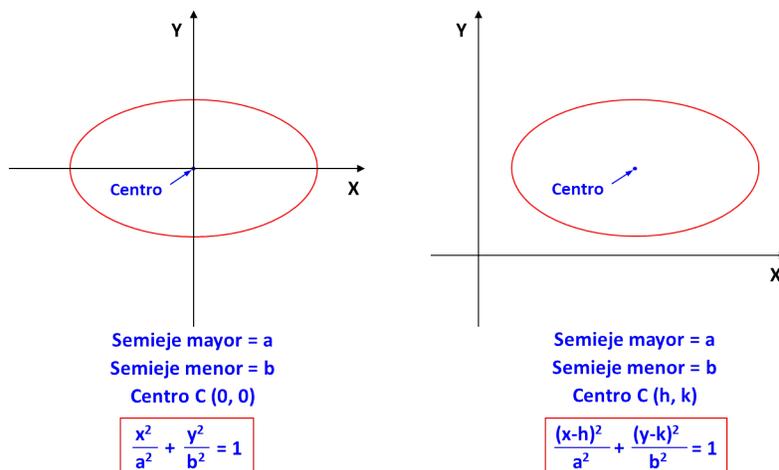
Los puntos F_1 y F_2 , llamados focos, están en una recta horizontal llamada eje focal, a la mediatriz del segmento $F_1 F_2$ se le llama eje conjugado. El punto C en que se cortan ambos ejes se denomina centro de la elipse.



El segmento del eje focal abarcado por la elipse se denomina eje mayor y el segmento del eje conjugado comprendido por la elipse se denomina eje menor. La distancia entre los focos se denota por $2c$, y como la cuerda debe ser más larga que la distancia entre los focos, es inmediato que $2a > 2c$. También merecen un nombre especial los puntos V_1 y V_2 en que la elipse corta al eje focal; se llaman vértices porque es en ellos donde la elipse se curva más.

Finalmente, se llama lado recto de la elipse a cualquiera de los segmentos de perpendicular al eje focal por uno de los focos, comprendido dentro de la elipse (recta punteada de la Figura).

De acuerdo a la definición, sus ecuaciones son



y en forma general las ecuaciones tienen la forma

Semieje mayor = a
Semieje menor = b
Centro C (0, 0)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

Semieje mayor = a
Semieje menor = b
Centro C (h, k)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$

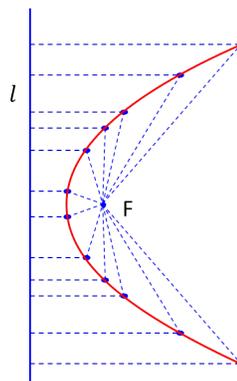
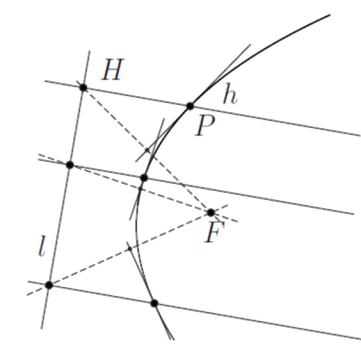
$$b^2x^2 - 2b^2hx + b^2h^2 + a^2y^2 - 2a^2ky + a^2k^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

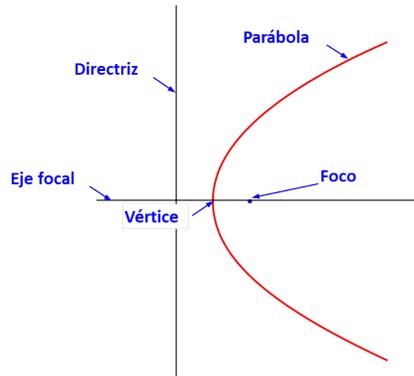
Parábola Fijemos ahora una recta l y un punto F fuera de la recta; si el pie de una perpendicular h a la recta se denota por H , la mediatriz del segmento HF corta a la perpendicular h en un punto P equidistante de la recta l y del punto F (véase la Figura). El conjunto de todos los puntos así obtenidos constituye una parábola.



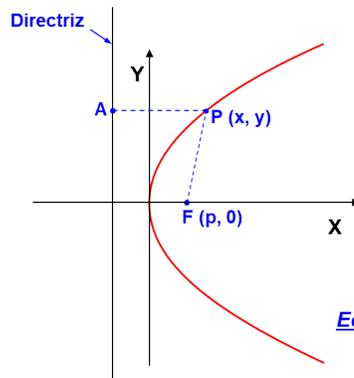
Definición 2. Una parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de una recta fija l y un punto fijo F exterior a la recta. En símbolos escribimos

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), l) = d(P, F)\}$$

Como lo muestra la Figura, dibujamos la recta fija, llamada directriz, en forma vertical y por el punto fijo, llamado foco, trazamos una perpendicular a la directriz, que denominamos eje de la parábola. Desde luego, el punto medio del segmento de perpendicular del foco a la directriz pertenece a la parábola y se denomina vértice de la parábola porque es el punto donde la parábola se curva más. El lado recto es el segmento, abarcado por la parábola, de la perpendicular al eje focal que pasa por el foco



De acuerdo a la definición sus ecuaciones son



$$d_{F,P} = d_{P,A}$$

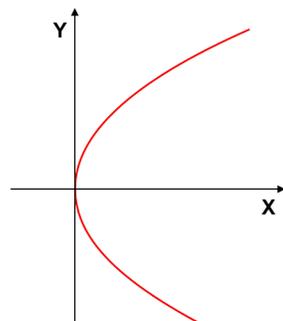
$$d_{F,P} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

$$d_{P,A} = x + p$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = x + p$$

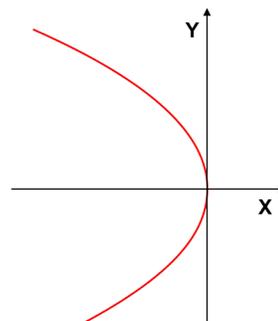
$$y^2 = 4px$$

Ecuación en Forma Ordinaria



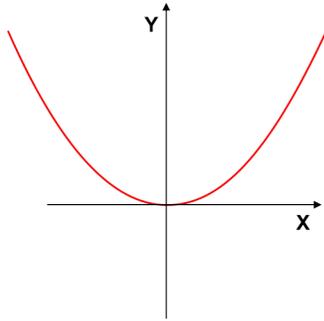
Eje focal coincidente con X
Vértice V (0, 0)
Abre hacia la derecha

$$y^2 = 4px$$



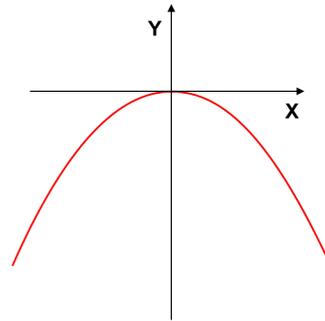
Eje focal coincidente con X
Vértice V (0, 0)
Abre hacia la izquierda

$$y^2 = -4px$$



Eje focal coincidente con Y
 Vértice V (0, 0)
 Abre hacia arriba

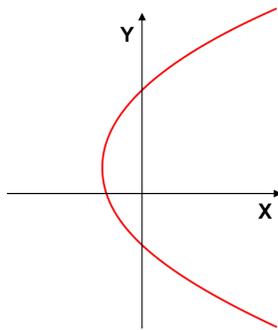
$$x^2 = 4py$$



Eje focal coincidente con Y
 Vértice V (0, 0)
 Abre hacia abajo

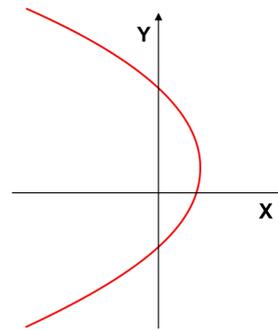
$$x^2 = -4py$$

Ecuaciones en Forma Ordinaria



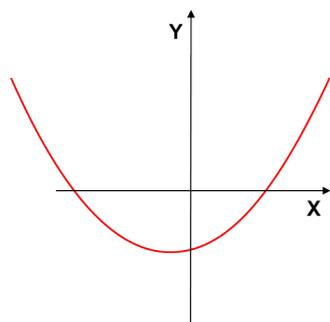
Eje focal paralelo a X
 Vértice V (h, k)
 Abre hacia la derecha

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$



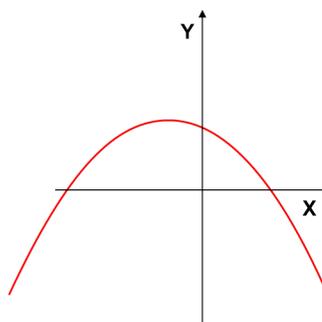
Eje focal paralelo a X
 Vértice V (h, k)
 Abre hacia la izquierda

$$(y - k)^2 = -4p(x - h)$$



Eje focal paralelo a Y
 Vértice V (h, k)
 Abre hacia arriba

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$



Eje focal paralelo a Y
 Vértice V (h, k)
 Abre hacia abajo

$$(x - h)^2 = -4p(y - k)$$

Al desarrollar, simplificar y reacomodar los términos de las formas ordinarias, se obtiene la ecuación en forma general de la parábola:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

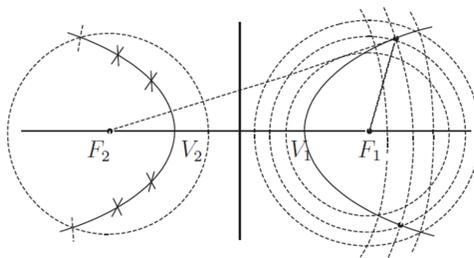
Cuando la parábola tiene su eje focal paralelo o coincidente con el eje X, el valor de A es cero, quedando:

$$By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Cuando la parábola tiene su eje focal paralelo o coincidente con el eje Y, el valor de B es cero, quedando:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Hipérbola Fijemos nuevamente un par de tachuelas en un cartón y tracemos dos circunferencias de radios distintos que se corten, cada una con centro en una de las tachuelas (véase la Figura). Si dibujamos nuevos pares de circunferencias cuidando de que el valor absoluto de la diferencia entre los dos radios sea igual al de la diferencia entre los dos radios primeros, estaremos obteniendo puntos de una hipérbola.

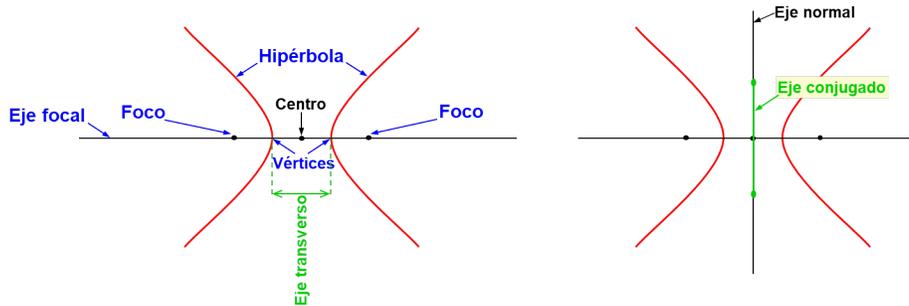


Definición 3. Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos P del plano cuyas distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 tienen una diferencia con valor absoluto constante, denotado por $2a$. En símbolos escribimos:

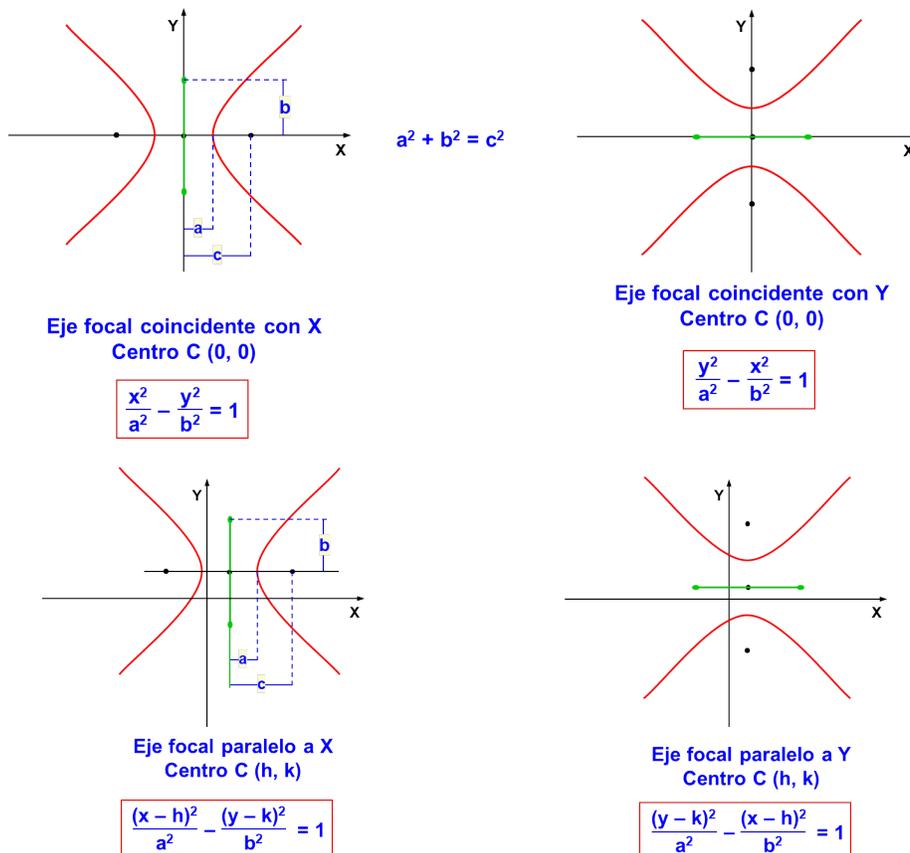
$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$

Para esta curva dibujamos la recta determinada por los focos, F_1 y F_2 en forma horizontal y la llamamos eje focal; la mediatriz del segmento F_1F_2 se denomina eje conjugado, y el punto de intersección de ambos ejes se denomina centro de la hipérbola.

Los puntos V_1 y V_2 en que la hipérbola corta al eje focal se denominan vértices de la hipérbola, pues son los puntos en que la hipérbola se curva más.



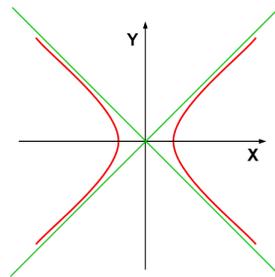
A partir de la definición la ecuación de la hipérbola es



Al desarrollar, simplificar y reacomodar los términos de las formas ordinarias, se obtiene la ecuación en forma general de la hipérbola:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Cuando la hipérbola tiene su eje focal paralelo o coincidente con el eje X, el valor de B es negativo. Cuando la hipérbola tiene su eje focal paralelo o coincidente con el eje Y, el valor de A es negativo. Sobre cualquier hipérbola se puede dibujar un par de rectas que nunca intersecan a la hipérbola, ese par de rectas se denominan asíntotas, dichas asíntotas no son necesariamente perpendiculares y tales que cuando el punto de la hipérbola se aleja del centro, la distancia a una de las rectas tiende a cero y la pendiente de la tangente en dicho punto tiende a la pendiente de la asíntota en cuestión



La hipérbola también tiene lados rectos; son los segmentos de perpendicular al eje focal por uno de los focos, comprendidos por la rama respectiva.

La hipérbola es la única cónica que consta de dos partes separadas llamadas ramas.