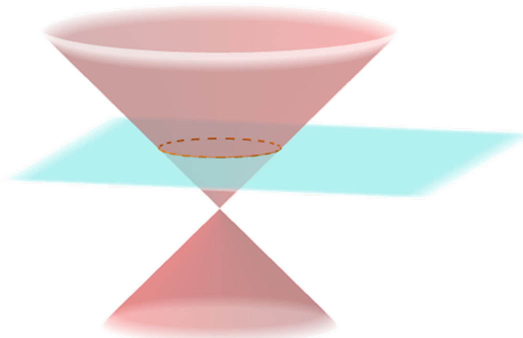
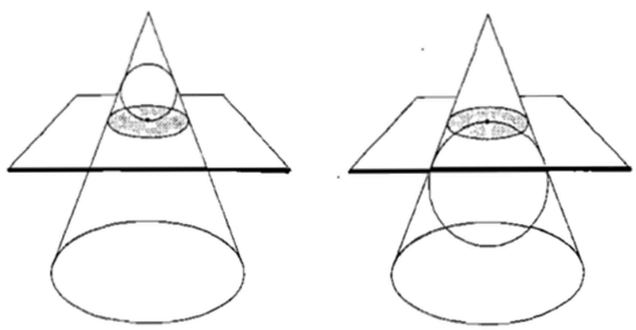
Esferas de Dandelin

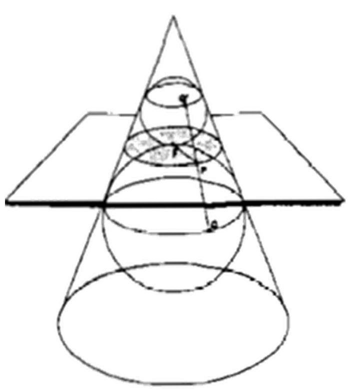
La intersección de un plano paralelo al eje Z con un cono es una circunferencia



Cuando la curva de intersección del cono con el plano secante es una circunferencia, puede inscribirse una esfera por encima del plano de corte y éste y aquella son tangentes precisamente en el centro de la circunferencia

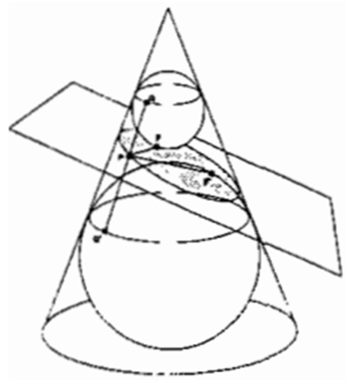


Idéntica situación se obtiene cuando una esfera se inscribe por debajo del plano de corte.
Es posible percibir según la figura que la distancia de un punto P de la circunferencia, al centro F (punto de contacto entre el plano y las esferas) es siempre la misma.



En efecto como QQ' está sobre la generatriz y como los planos que determinan a Q y Q' son paralelos, QQ' se mantiene constante. Por otro lado, debido a la igualdad de las tangentes a una esfera desde un punto exterior, tenemos $FP = PQ$ y $FP = PQ'$. Esto significa que FP es la mitad de QQ', es decir, es constante para cualquier punto P de la circunferencia.

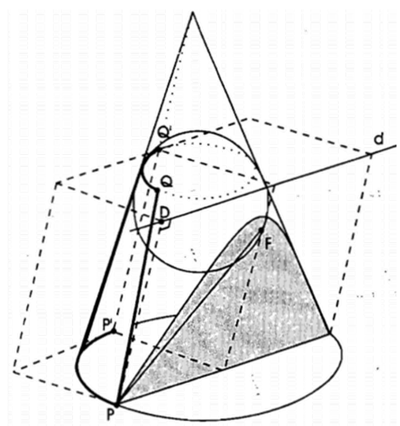
Esta situación sugiere estudiar, desde la misma perspectiva, la curva obtenida al inclinar el plano (pero cortando aún todas las generatrices del cono): la elipse



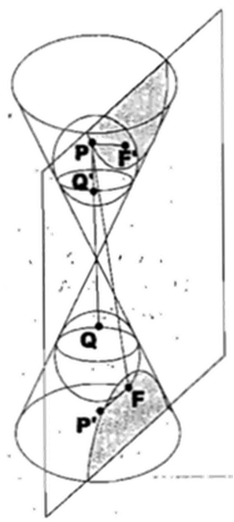
Las esferas inscritas en el cono son tangentes al plano de corte, por encima y por abajo, en los puntos F y F'. Al ser $PF = PQ$ y $PF' = PQ'$, ya que son iguales dos tangentes de un punto exterior P a cualquiera de las esferas, resulta que

$$PF + PF' = PQ + PQ' = QQ'$$

que es la longitud constante sobre la generatriz del cono.
El caso de la parábola



Observemos que el punto de tangencia de la esfera inscrita y el plano paralelo a una generatriz del cono es el foco F; la recta d (directriz de la parábola) es la intersección del plano que contiene a la circunferencia de tangencia entre la esfera y el cono. El punto D es el punto en el pie de la perpendicular desde P a la recta d.
La propiedad que define la parábola, $PF = PD$, se sigue de los hechos siguientes $PF = PQ$ por ser tangentes a la esfera desde el punto exterior P; $PQ = PQ'$ por ser generatrices comprendidas entre planos paralelos; por último, en el paralelepipedo que forman los planos indicados en la figura, $P'Q' = PD$.
Tenemos así la cadena de igualdades $PF = PQ = P'Q' = PD$ que muestra que $PF = PD$



Para la hipérbola, observamos que los focos F y F', son los puntos de tangencia de las esferas inscritas, superior e inferior, con el plano de corte; P es un punto sobre una de las ramas de la hipérbola. Debido al hecho de que $PF = PQ$ y que $PF' = PQ'$ (por ser pares de tangentes externas, desde P, a cada esfera), podemos concluir que

$$FP - F'P = PQ - PQ' = QQ'$$

que es una distancia constante. Ésta es, claramente, la propiedad que define a la hipérbola