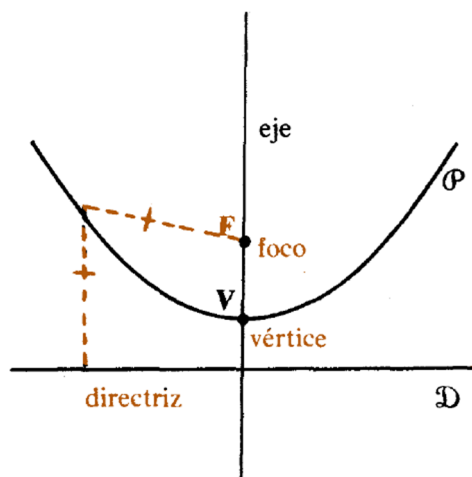
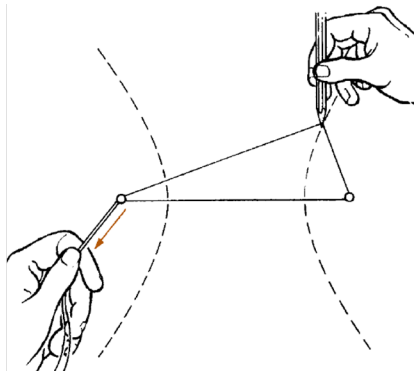
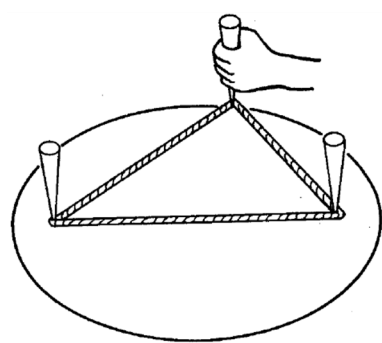


Definición general de Cónicas (Excentricidad)

Se definió la parábola en términos de las distancias que separan a cada punto de la curva de un punto fijo (el foco) y de una recta dada (la directriz)

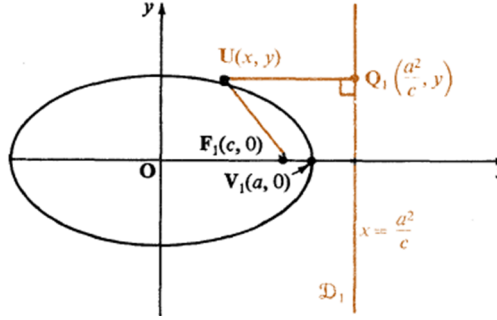


Por otra parte se definieron la elipse y la hipérbola en términos de la suma y diferencia, respectivamente, de las distancias que separan cada punto de la curva de dos puntos fijos (los focos).



Es posible también definir a la elipse y la hipérbola en términos de distancias a un punto y una recta fijos, tal como se hizo en el caso de la parábola

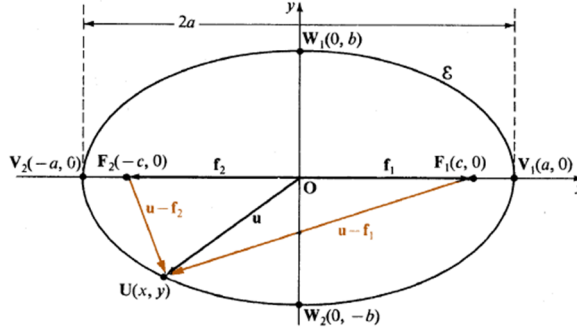
Definición de Elipse en términos de distancias a un punto y una recta fijos Considérese la elipse con centro en el origen, un foco en $F_1(c, 0)$, y un vértice en $V_1(a, 0)$, con $0 < c < a$



La distancia $d(U, F_1)$ de cada punto $U(x, y)$ de la elipse al foco F_1 está dada por

$$d(U, F_1) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Por otro lado según la figura



$$\begin{aligned} d(U, F_2) + d(U, F_1) &= 2a \Rightarrow \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a \\ &\Rightarrow \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ &\Rightarrow (x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2 \\ &\Rightarrow a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx \\ &\Rightarrow \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d(U, F_1) = a - \frac{c}{a}x$$

de donde se obtiene

$$d(U, F_1) = \frac{c}{a} \left(\frac{a^2}{c} - x \right) \quad (1)$$

En la expresión (1) se tiene

$$x \leq a \quad y \quad 0 < c < a \Rightarrow x \leq a < \frac{a^2}{c}$$

por lo tanto

$$\frac{a^2}{c} - x > 0$$

Por otro lado

$$d(U, D_1) = \left| \frac{a^2}{c} - x \right| = \frac{a^2}{c} - x$$

de manera que (1) se puede escribir

$$d(U, F_1) = \frac{c}{a} \left(\frac{a^2}{c} - x \right) \Rightarrow d(U, F_1) = \frac{c}{a} d(U, D_1) \Rightarrow \frac{d(U, F_1)}{d(U, D_1)} = \frac{c}{a}$$

El cociente $\frac{c}{a}$ recibe el nombre de excentricidad de la elipse, y se acostumbra denotar e .
Observamos que

$$0 < e < 1$$

puesto que $0 < c < a$.

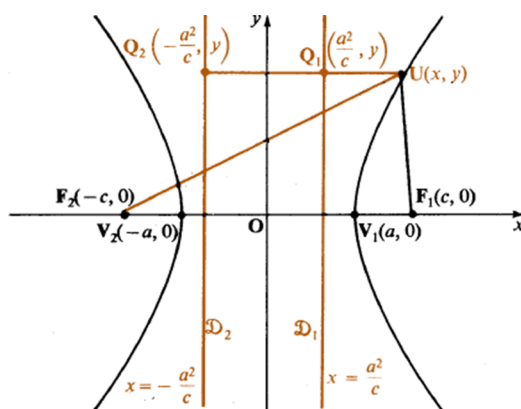
Tenemos entonces que

$$\frac{d(U, F_1)}{d(U, D_1)} = e$$

Podemos entonces definir una elipse como el lugar geométrico de todos los puntos tales que el cociente de las distancias que separan a cada punto sobre el lugar geométrico de un punto dado (el foco) y de una recta dada (la directriz) es una constante e , con $0 < e < 1$.

Definición de Hipérbola en términos de distancias a un punto y una recta fijos Mediante un procedimiento análogo se muestra que para una hipérbola con centro en el origen, foco en $F_1(c, 0)$, y un vértice en $V_1(a, 0)$, con $0 < a < c$, el cociente de las distancias que separa un punto $U(x, y)$ de la hipérbola del foco $F_1(c, 0)$ y de la recta D_1 cuya ecuación es $x = \frac{a^2}{c}$ esta dado por

$$\frac{d(U, F_1)}{d(U, D_1)} = \frac{d(U, F_2)}{d(U, D_2)} = e$$



en el caso de la hipérbola, como $0 < a < c$ y $e = \frac{c}{a}$, se tiene $e > 1$

Podemos resumir de la siguiente manera:

Para una recta dada D y un punto fijo F que no esta sobre D , el lugar geométrico de los puntos U del plano tales que el cociente de las distancias de U a F y a D es una constante, e , es

1. Una elipse si $0 < e < 1$,
2. una parábola si $e = 1$ y
3. una hipérbola si $e > 1$

