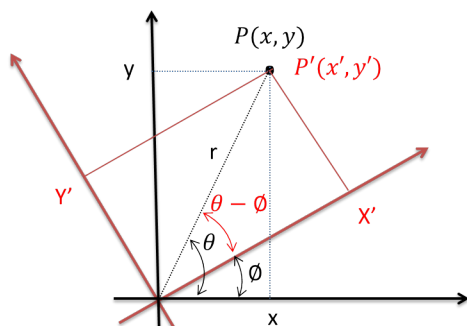


Rotación de Cónicas en $\mathbb{R}^2$

Rotación de ejes Dado un sistema coordenado X, Y si se rotan los ejes de coordenadas alrededor del origen y se considera que están fijos todos los puntos del plano, entonces cada punto (o vector), excepto el origen, tendrá un nuevo par de coordenadas (o componentes). Estas nuevas coordenadas se pueden calcular con trigonometría.



Si los ejes se rotan en un ángulo ϕ . Según la figura se tiene

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow r \cos \theta = x$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow r \sin \theta = y$$

también

$$\cos \theta - \phi = \frac{x'}{r} \Rightarrow r \cos \theta - \phi = x'$$

$$\sin \theta - \phi = \frac{y'}{r} \Rightarrow r \sin \theta - \phi = y'$$

Usando las fórmulas

$$\cos \theta - \phi = \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi$$

$$\sin \theta - \phi = \sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi$$

Se tiene que

$$x' = r \cos \theta - \phi = r(\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi) = r \cos \theta \cos \phi + r \sin \theta \sin \phi$$

$$y' = r \sin \theta - \phi = r(\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi) = r \sin \theta \cos \phi - r \cos \theta \sin \phi$$

por lo tanto

$$x' = r \cos \theta \cos \phi + r \sin \theta \sin \phi$$

$$y' = r \sin \theta \cos \phi - r \cos \theta \sin \phi$$

Teniendo en cuenta que

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

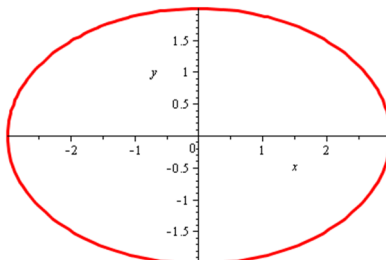
tenemos que

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi$$

$$y' = y \cos \phi - x \sin \phi$$

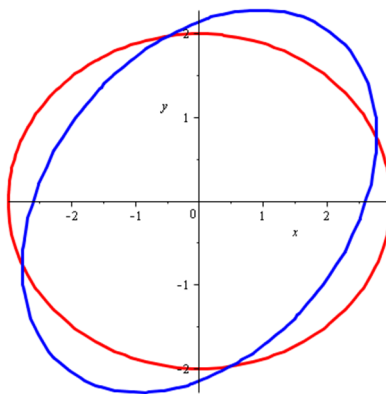
Ejemplo Dada la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

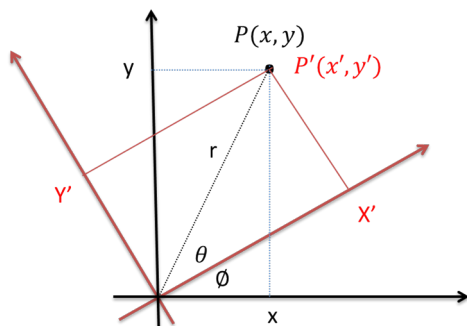


Vamos a aplicarle una rotación en un ángulo de 30° , tenemos entonces

$$\begin{aligned} \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1 &\Rightarrow \frac{(x \cos \phi + y \sin \phi)^2}{9} + \frac{(y \cos \phi - x \sin \phi)^2}{4} = 1 \\ &\Rightarrow 4(x \cos \phi + y \sin \phi)^2 + 9(y \cos \phi - x \sin \phi)^2 - 36 = 0 \\ &\Rightarrow 4(x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ)^2 + 9(y \cos 30^\circ - x \sin 30^\circ)^2 - 36 = 0 \\ &\Rightarrow 4\left(x \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y \left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 9\left(y \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - x \left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 - 36 = 0 \\ &\Rightarrow 4\left(\frac{3x^2}{4} + 2\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y^2}{4}\right) + 9\left(\frac{3y^2}{4} - 2\left(\frac{\sqrt{3}y}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{4}\right) - 36 = 0 \\ &\Rightarrow 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + \frac{27}{4}y^2 - \frac{18\sqrt{3}}{4}xy + \frac{9}{4}x^2 - 36 = 0 \\ &\Rightarrow \frac{21}{4}x^2 + \frac{31}{4}y^2 - \frac{5\sqrt{3}}{2}xy - 36 = 0 \end{aligned}$$



Ecuaciones para normalizar ejes rotados Dado un sistema de referencia X', Y' rotado un ángulo de 30° ahora queremos encontrar la manera de regresarlo a una posición normal.



Si los ejes rotados se rotan en un ángulo ϕ . Según la figura se tiene

$$\cos \theta = \frac{x'}{r} \Rightarrow r \cos \theta = x'$$

$$\sin \theta = \frac{y'}{r} \Rightarrow r \sin \theta = y'$$

también

$$\cos \theta + \phi = \frac{x}{r} \Rightarrow r \cos \theta + \phi = x$$

$$\sin \theta + \phi = \frac{y}{r} \Rightarrow r \sin \theta - \phi = y$$

Usando las fórmulas

$$\cos \theta + \phi = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$$

$$\sin \theta + \phi = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$$

Se tiene que

$$x = r \cos \theta + \phi = r(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) = r \cos \theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi$$

$$y = r \sin \theta + \phi = r(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi) = r \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \sin \phi$$

por lo tanto

$$x = r \cos \theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi$$

$$y = r \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \sin \phi$$

Teniendo en cuenta que

$$x' = r \cos \theta$$

$$y' = r \sin \theta$$

tenemos que

$$x = x' \cos \phi - y' \sin \phi$$

$$y = y' \cos \phi + x' \sin \phi$$

Ejemplo Con un ángulo de 30° vamos a aplicar estas ecuaciones a la elipse rotada

$$\frac{21}{4}x^2 + \frac{31}{4}y^2 - \frac{5\sqrt{3}}{2}xy - 36 = 0$$

tenemos entonces

$$\frac{21}{4}x^2 + \frac{31}{4}y^2 - \frac{5\sqrt{3}}{2}xy - 36 = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{21}{4}(x' \cos \phi - y' \sin \phi)^2 + \frac{31}{4}(y' \cos \phi + x' \sin \phi)^2 - \frac{5\sqrt{3}}{2}(x' \cos \phi - y' \sin \phi)(y' \cos \phi + x' \sin \phi) - 36 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{21}{4}(x' \cos 30^\circ - y' \sin 30^\circ)^2 + \frac{31}{4}(y' \cos 30^\circ + x' \sin 30^\circ)^2 \\
&\quad - \frac{5\sqrt{3}}{2}(x' \cos 30^\circ - y' \sin 30^\circ)(y' \cos 30^\circ + x' \sin 30^\circ) - 36 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{21}{4}\left(x' \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - y' \left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{31}{4}\left(y' \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + x' \left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \\
&\quad - \frac{5\sqrt{3}}{2}\left(x' \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - y' \left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(y' \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + x' \left(\frac{1}{2}\right)\right) - 36 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{21}{4}\left(\frac{3x'^2}{4} - 2\left(\frac{\sqrt{3}x'}{2}\right)\left(\frac{y'}{2}\right) + \frac{y'^2}{4}\right) + \frac{31}{4}\left(\frac{x'^2}{4} + 2\left(\frac{x'}{2}\right)\left(\frac{y'\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3y'^2}{4}\right) \\
&\quad - \frac{5\sqrt{3}}{2}\left(\frac{x'^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3x'y'}{4} - \frac{x'y'}{4} - \frac{y'^2\sqrt{3}}{4}\right) - 36 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{63}{16}x'^2 - \frac{42\sqrt{3}}{16}x'y' + \frac{21}{16}y'^2 + \frac{31}{16}x'^2 + \frac{62\sqrt{3}}{16}x'y' + \frac{93}{16}y'^2 - \frac{15}{8}x'^2 - \frac{15\sqrt{3}}{8}x'y' + \frac{5\sqrt{3}}{8}x'y' + \frac{15}{8}y'^2 - 36 = 0 \\
&\Rightarrow \left(\frac{63}{16} + \frac{31}{16} - \frac{15}{8}\right)x'^2 + \left(-\frac{42\sqrt{3}}{16} + \frac{62\sqrt{3}}{16} - \frac{15\sqrt{3}}{8} + \frac{5\sqrt{3}}{8}\right)x'y' + \left(\frac{21}{16} + \frac{93}{16} + \frac{15}{8}\right)y'^2 - 36 = 0 \\
&\Rightarrow 4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0
\end{aligned}$$

Según lo anterior, tenemos que dada la ecuación de la elipse con ejes normales

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

al rotarla un ángulo de 30° obtuvimos la ecuación

$$\frac{21}{4}x^2 + \frac{31}{4}y^2 - \frac{5\sqrt{3}}{2}xy - 36 = 0$$

notamos que aparece un término mixto xy el cual quiere decir que la elipse está rotada.

Resumimos esto de la siguiente manera, una cónica tiene ecuación general

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si la cónica está rotada, tendrá ecuación general

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$