Sea W un subespacio no trivial de $\mathbb{R}^2$.

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$$

Y sea L un subespaciono trivial de $\mathbb{R}^2$.

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y_0 x - x_0 y = 0\}$$

Sea (x_0, y_0) un vector no nulo de W. Supóngase que $x_0 \neq 0$.
Vamos a mostrar que $L = W$, primero mostrando que
$L \subset W$
Ya hemos probado que si $(x_0, y_0) \in W$ y $(x_1, y_1) \in L$ entonces

$$y_0 x_1 - x_0 y_1 = 0 \ \Rightarrow \ y_1 = \frac{y_0 x_1}{x_0}$$

Sea $\lambda = \dfrac{x_1}{x_0} \in \mathbb{R}$ y observamos que

$$(x_1, y_1) = \left(x_1, \frac{y_0 x_1}{x_0}\right) = \left(\frac{x_1}{x_0}\right)(x_0, y_0) = \lambda(x_0, y_0)$$

Pero $(x_0, y_0) \in W$ y W es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Entonces $(x_1, y_1) \in W$ por lo que $L \subset W$
$W \subset L$
Supongamos que $W \not\subset L$. Existiria $(x_2, y_2) \in W$ tal que $(x_2, y_2) \notin L$. Es decir $(x_2, y_2) \in W$ y $y_0 x_2 - x_0 y_2 \neq 0$. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cualquiera, y considérese el sistema de dos ecuaciones con dos incognitas λ y μ

$$\begin{aligned} y_0\lambda + y_2\mu &= y \\ x_0\lambda + x_2\mu &= x \end{aligned}$$

El determinante del sistema es $y_0 x_2 - x_0 y_2 \neq 0$ por lo que existe una única solución $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ tal que

$$\begin{aligned} y_0\tilde{\lambda} + y_2\tilde{\mu} &= y \\ x_0\tilde{\lambda} + x_2\tilde{\mu} &= x \end{aligned}$$

pero entonces

$$(x, y) = (x_0\tilde{\lambda} + x_2\tilde{\mu}, y_0\tilde{\lambda} + y_2\tilde{\mu}) = \tilde{\lambda}(x_0, y_0) + \tilde{\mu}(x_2, y_2)$$

tanto (x_0, y_0) como (x_2, y_2) son vectores de W. Siendo éste un subespacio de $\mathbb{R}^2$, concluimos que $(x, y) \in W$. Pero (x, y) era un vector arbitrario de $\mathbb{R}^2$. Por tanto, $W = \mathbb{R}^2$., lo que contradice la hipótesis de que W es es un subespacio no trivial de $\mathbb{R}^2$. Entonces $W = L$.

Definición 1. *Sea V un espacio vectorial. Sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores de V. Se dice que el vector $v \in V$ es una combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_n$, si existen escalares $c_1, \ldots, c_n$ tales que*

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

Ejemplo El vector $(14, 12, 2)$ en $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores $(1, 2, -1)$ y $(3, 2, 1)$ puesto que

$$(14, 12, 2) = 2(1, 2, -1) + 4(3, 2, 1)$$

Al conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de los elementos de un subconjunto $S \subset V$ lo denotamos $\pounds(S)$. Entonces

$$\pounds(S) = \{c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n \mid c_i \in \mathbb{R}, v_i \in S,\ i = 1, ..., k,\ k \in \mathbb{N}\}$$

Teorema 1. *Sea V un espacio vectorial, y sean $v_1, v_2, ..., v_n$, n vectores de V. Entonces el conjunto*

$$\pounds(v_1, v_2, ..., v_n) = \{c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n \mid c_i \in \mathbb{R}, v_i \in S,\ i = 1, ..., k,\ k \in \mathbb{N}\}$$

es un subespacio de V

Demostración. Sean $x, y \in \pounds(v_1, v_2, ..., v_n)$. Entonces existen $c_1, ..., c_n$ y $d_1, ..., d_n$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$x = c_1v_1 + \ldots + c_nv_n$$
$$y = d_1v_1 + \ldots + d_nv_n$$

Tenemos entonces que

$$x + y = c_1v_1 + \ldots c_nv_n + d_1v_1 + \ldots d_nv_n = (c_1 + d_1)v_1 + \ldots + (c_n + d_n)v_n$$

lo que demuestra que $x + y \in \pounds(v_1, v_2, ..., v_n)$
En forma similar, si $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\lambda x = \lambda(c_1v_1 + \ldots + c_nv_n) = (\lambda c_1)v_1 + \ldots + (\lambda c_1)v_1 + \ldots + (\lambda c_n)v_n$$

lo que prueba que $\lambda x \ \in \pounds(v_1, v_2, ..., v_n)$. Entonces, $\pounds(v_1, v_2, ..., v_n)$ es un subespacio de V.
Dado que

$$v_i = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 1 \cdot v_i + \ldots + 0 \cdot v_n$$

entonces los vectores $v_i \in \pounds(v_1, v_2, ..., v_n)$ □

Definición 2. *Sea V un espacio vectorial y sean $v_1, ..., v_n$ vectores de V. Al subespacio $\pounds(v_1, v_2, ..., v_n)$ se le llama subespacio generado por los vectores $v_1, ..., v_n$*

Definición 3. *Un subconjunto U de un espacio vectorial V es un conjunto generador del espacio vectorial V si cualquier elemento de V puede obtenerse como combinación lineal de elementos de U, es decir, para cualquier $\overline{v} \in V$ se tiene*

$$\overline{v} = \lambda_1\overline{u}_1 + \lambda_2\overline{u}_2 + \cdots + \lambda_n\overline{u}_n$$

para algunos $\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n \in U$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$

Ejemplo Para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

por tanto el conjunto $\{(1, 0), (0, 1)\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$

Ejemplo Para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

por tanto el conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$