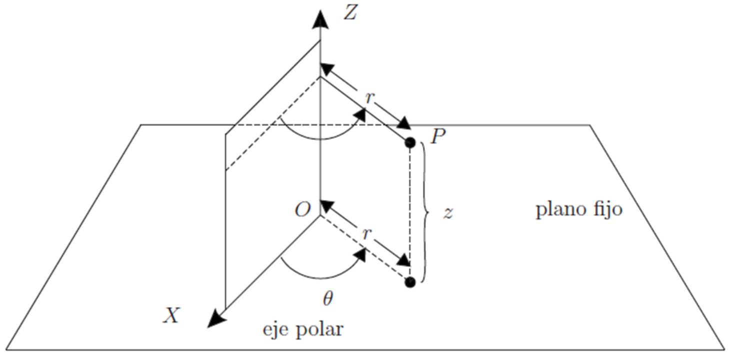
Coordenadas cilíndricas

Consideremos un plano con un sistema coordenado polar cuyo eje polar denotamos por X, y tracemos por el polo una recta perpendicular que denotaremos por Z en la cual elegimos un rayo positivo. Entonces, cualquier punto P del espacio que no pertenezca a la recta Z determina tres números reales en la forma siguiente

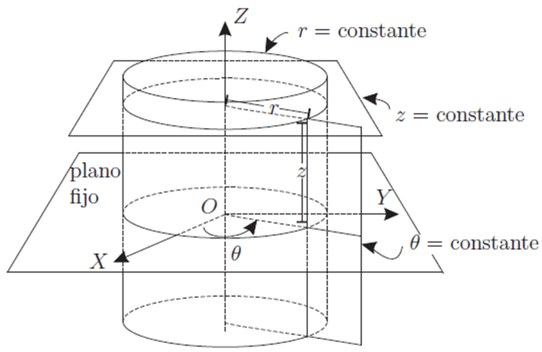


1. la distancia del punto P a la recta perpendicular Z, que denotamos por r
2. el ángulo entre los semiplanos XZ y PZ, el semiplano por la recta Z que contiene al punto P, que denotaremos por θ, y cuyo intervalo de variación será $[0, 2\pi)$
3. la altura orientada sobre el plano elegido, acorde con la orientación en la recta coordenada Z y que denotaremos por z.

Los números de la terna (r, θ, z) se denominan coordenadas cilíndricas del punto P y suelen escribirse en ese orden.

Superficies coordenadas

1. El lugar geométrico correspondiente a la ecuación r = constante es un cilindro circular, porque cualquier punto del cilindro de radio r con eje Z cumple la condición.
2. El lugar geométrico correspondiente a la ecuación $\theta =$ constante es el semiplano por el eje Z que forma un ángulo θ con el semiplano XZ. La razón de considerar sólo un semiplano y no todo el plano es que el semiplano complementario forma un ángulo $\pi + \theta$ con el semiplano XZ, como ocurre en el caso de coordenadas polares con dos rayos complementarios.
3. El lugar geométrico correspondiente a la condición z = constante es un plano cuya altura orientada sobre el plano fijo original es z.



dos superficies coordenadas de familias distintas se cortan perpendicularmente y en consecuencia, cualesquiera tres superficies una de cada tipo tienen como intersección común un sólo punto y, por eso, dados tres números reales r, θ y z pertenecientes a los intervalos correspondientes, existe un único punto en el espacio cuyas coordenadas cilíndricas forman la terna dada.

Ahora vamos a obtener la relación entre las coordenadas cilíndricas y las cartesianas, considerando como eje X a la recta que contiene el eje polar, como eje Z a la recta perpendicular al plano fijo, y como eje Y a la recta perpendicular a las dos anteriores con la orientación adecuada para que el sistema resulte derecho. Entonces, si nos referimos a la Figura, el punto P de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) tiene coordenadas cartesianas

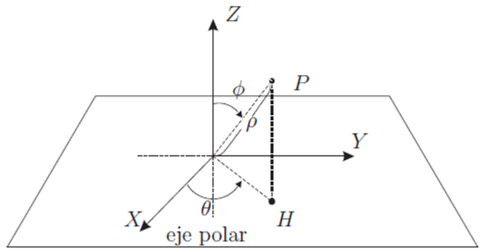
$$x = r \ \cos \ \theta$$
$$y = r \ \operatorname{sen} \ \theta$$
$$z = z$$

Recíprocamente, si conocemos las coordenadas cartesianas (x, y, z) del punto P, sus coordenadas cilíndricas son

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$z = z$$

Coordenadas esféricas

Consideremos un plano fijo en el espacio (que suele dibujarse horizontal) en el cual se introduce un sistema coordenado polar con eje polar X y polo O, y una recta perpendicular a dicho plano que denotaremos por Z y en la cual eligimos como rayo positivo el que con el eje polar y el conjugado dé lugar a un sistema derecho. Entonces cualquier punto $P \notin 2$ Z del espacio determina tres números llamados las coordenadas esf´ericas del punto P:

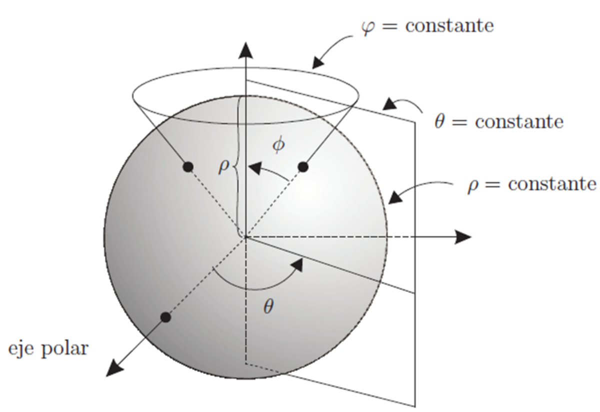


1. la distancia del punto al polo, que denotaremos por ρ
2. el ángulo entre el semiplano XZ y el semiplano por la recta Z que contiene al punto P, denotado por θ y con valores entre $[0, 2\pi)$
3. el ángulo entre el rayo positivo del eje Z y el rayo OP, que denotaremos por ϕ y consideraremos entre $(0, \pi)$.

Los números de la terna (ρ, θ, ϕ) se denominan coordenadas esféricas del punto P y suelen escribirse en ese orden.

Superficies coordenadas

1. esferas con centro en el origen si $\rho =$ constante, y dicha constante es el radio de la esfera;
2. semiplanos por el eje Z si $\theta =$ constante, y dicha constante corresponde al ángulo en el sistema polar del pie H de la perpendicular de P al plano fijo;
3. conos (más bien, medios conos) de revolución con vértice en el origen si$\phi =$ constante, donde el eje de revolución es el rayo positivo Z.



dos superficies coordenadas de familias distintas se cortan perpendicularmente, por lo cual la intersección es toda una curva y tres superficies coordenadas cada una de un tipo distinto se cortan en un sólo punto y, por tanto, lo determinan.

Ahora vamos a obtener la relación entre las coordenadas esfericas y las cartesianas. Entonces, si nos referimos a la Figura, el punto P de coordenadas esfericas (ρ, θ, ϕ) tiene coordenadas cartesianas

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \ \cos \ \theta \ \text{ sen } \ \phi \\
y &= \rho \ \text{ sen } \ \theta \ \text{ sen } \ \phi \\
z &= \rho \ \cos \ \phi
\end{aligned}
$$

Recíprocamente, si conocemos las coordenadas cartesianas (x, y, z) del punto P, sus coordenadas cilíndricas son

$$
\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
\theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\
z &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)
\end{aligned}
$$