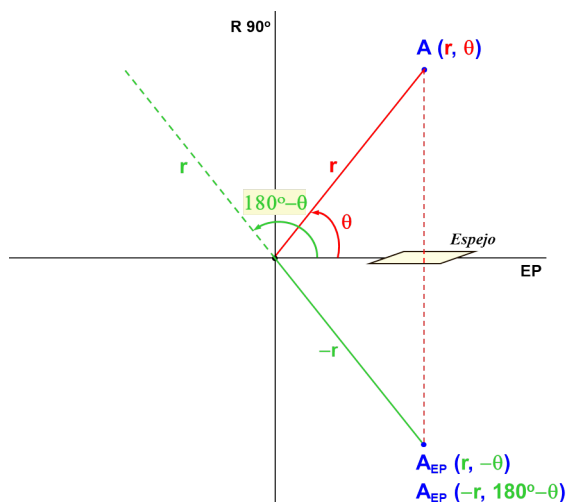
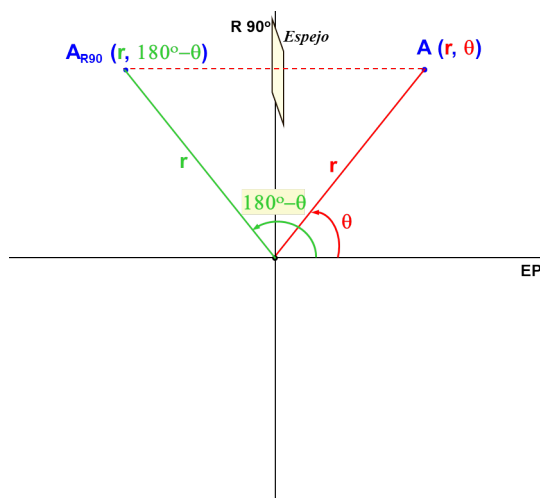


Curvas en coordenadas polares

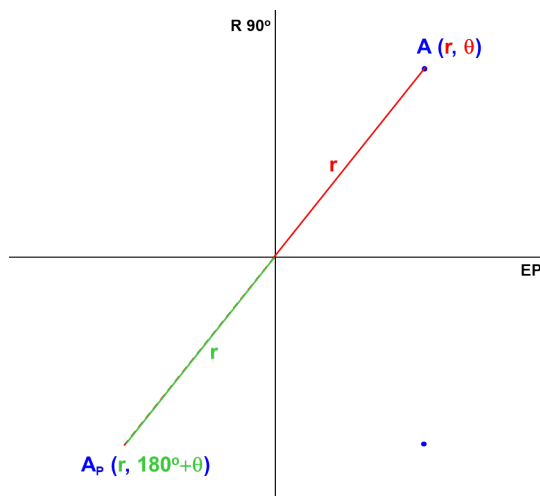
Simetrías en el plano polar Un punto A_{ep} es simétrico del punto $A(r, \theta)$ respecto al eje polar si sus coordenadas son $(r, -\theta) = (-r, \pi - \theta)$



Simetrías en el eje conjugado Un punto A_{R90} es simétrico del punto $A(r, \theta)$ respecto al eje conjugado si sus coordenadas son $(r, \pi - \theta)$.



Simetrías en el polo Un punto A_P es simétrico del punto $A(r, \theta)$ respecto al polo si sus coordenadas son $(r, \pi + \theta)$.



Discusión de una ecuación polar La discusión consiste en una serie de pasos que permiten identificar a la curva, determinando sus características geométricas:

1. Intersecciones
2. Simetrías
3. Extensión
4. Gráfica

Ejemplo Considere la ecuación

$$r = \frac{1}{1 - \cos \theta}$$

1. Intersecciones: Para determinar las intersecciones de la curva con el eje polar, se sustituye, en la ecuación polar, θ por 0° y θ por 180° , en este caso

$$\begin{array}{ll} r = \frac{1}{1 - \cos 0^\circ} & r = \frac{1}{1 - \cos 180^\circ} \\ r = \frac{1}{1 - 1} & r = \frac{1}{1 - (-1)} \\ r = \frac{1}{0} & r = \frac{1}{2} \\ \text{No existe intersección} & \text{Intersección en } P = \left(\frac{1}{2}, 180^\circ\right) \end{array}$$

Para determinar las intersecciones de la curva con el eje a 90° , se sustituye, en la ecuación

polar, θ por 90° y θ por 270° , en este caso

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{1 - \cos 90^\circ} & r &= \frac{1}{1 - \cos 270^\circ} \\ r &= \frac{1}{1 - 0} & r &= \frac{1}{1 - 0} \\ r &= 1 & r &= 1 \end{aligned}$$

existe intersección $P = (1, 90^\circ)$ Intersección en $P = (1, 270^\circ)$

Para determinar las intersecciones de la curva con el polo, se sustituye, en la ecuación polar, r por 0, en este caso

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{1 - \cos \theta} \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

No contiene al polo

2. Simetría: Para determinar si la curva es simétrica con respecto al eje polar, primero se sustituye en la ecuación θ por $-\theta$ y si la ecuación no se altera entonces se dice que si existe simetría; sin embargo, si la ecuación se altera se tiene que sustituir θ por $(180^\circ - \theta)$ y r por $-r$, si entonces, la ecuación no se altera se dice que si existe simetría y si la ecuación se altera no existe simetría. En este caso

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{1 - \cos (-\theta)} \\ r &= \frac{1}{1 - \cos \theta} \end{aligned}$$

No se altera, existe simetría

Para determinar si la curva es simétrica con respecto a la recta a 90° , primero se sustituye en la ecuación θ por $-\theta$ y r por $-r$, si la ecuación no se altera entonces se dice que si existe simetría; sin embargo, si la ecuación se altera se tiene que sustituir θ por $(180^\circ - \theta)$, si entonces, la ecuación no se altera se dice que si existe simetría y si la ecuación se altera no existe simetría. En este caso

$$\begin{aligned} -r &= \frac{1}{1 - \cos -\theta} & r &= \frac{1}{1 - \cos (180^\circ - \theta)} \\ -r &= \frac{1}{\cos \theta} & r &= \frac{1}{\cos 180^\circ \cos \theta + \sin 180^\circ \sin \theta} \\ \text{Se altera, no decide} & & r &= \frac{1}{1 + \cos \theta} \\ & & \text{Se altera, no existe simetría} \end{aligned}$$

Para determinar si la curva es simétrica con respecto al polo, primero se sustituye en la ecuación r por $-r$, si la ecuación no se altera entonces se dice que si existe simetría; sin embargo, si la ecuación se altera se tiene que sustituir θ por $(180^\circ + \theta)$, si entonces, la ecuación no se altera se dice que si existe simetría y si la ecuación se altera no existe simetría. En este caso

$$\begin{aligned} -r &= \frac{1}{1 - \cos -\theta} & r &= \frac{1}{1 - \cos (180^\circ + \theta)} \\ \text{Se altera, no decide} & & r &= \frac{1}{\cos 180^\circ \cos \theta - \sin 180^\circ \sin \theta} \\ & & r &= \frac{1}{1 + \cos \theta} \\ & & \text{Se altera, no existe simetría} \end{aligned}$$

3. Extensión: Para determinar la extensión de la curva; es decir, si es abierta o cerrada, se debe verificar si para todo valor de θ , existe un valor finito de r . Si es así, entonces la curva es cerrada, pero si existe un valor de θ para el cual r se indetermina, entonces la curva es abierta. En este caso

$$\begin{aligned}\cos \theta &\in [-1, 1] \\ 1 - \cos \theta &\in [0, 2] \\ \frac{1}{1 - \cos \theta} &\in \left[\frac{1}{2}, \infty\right]\end{aligned}$$

En este caso, el valor de r se indetermina cuando θ es 0° ; por lo tanto, la curva es abierta.

4. Gráfica: Para determinar la gráfica de la curva, se tiene que tabular r y θ dando valores a θ para obtener los correspondientes valores de r . Generalmente se emplean los valores de 0° , 30° , 45° y sus múltiplos enteros hasta 360° ; posteriormente, se grafican dichos valores y se establece la forma de la curva.

r	θ
—	0°
7,46	30°
3,41	45°
2,0	60°
1,0	90°
0,66	120°
0,58	135°
0,53	150°
0,50	180°
0,53	210°
0,58	225°
0,66	240°
1,0	270°
2,0	300°
3,41	315°
7,46	330°
—	360°

Al graficar se obtiene:

