Dimensión de una curva

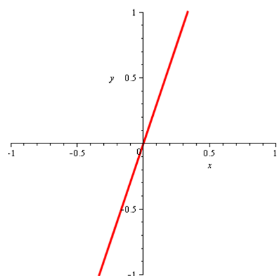
Dimensión de rectas en $\mathbb{R}^2$. Consideremos el vector $(1,3) \in \mathbb{R}^2$ y tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}((1,3)) &= \{\lambda(1,3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &\{(\lambda, 3\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

En este caso

$$\left\{ \begin{array}{c} x = \lambda \\ y = 3\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow y = 3x$$

El conjunto generado es una recta.



Donde el vector $(1,3) \in \mathbb{R}^2$ es una base del conjunto, en este caso la dimensión de la recta generada es 1

Dimensión de rectas en $\mathbb{R}^3$. Consideremos el vector $(1,3,-1) \in \mathbb{R}^3$ y tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}((1,3,-1)) &= \{\lambda(1,3,-1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &\{(\lambda, 3\lambda, -\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

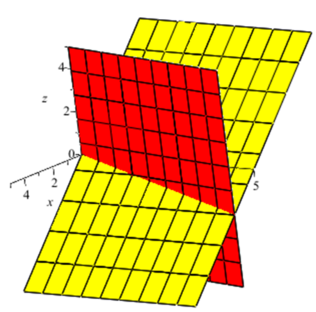
En este caso

$$\left\{ \begin{array}{c} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 3x \\ z = -x \end{array} \right\}$$

El conjunto generado es una recta en $\mathbb{R}^3$, cuya representación cartesiana es un par de ecuaciones

$$\begin{array}{c} y = 3x \\ z = -x \end{array}$$

que se interpretan como la intersección de dos planos en $\mathbb{R}^3$.

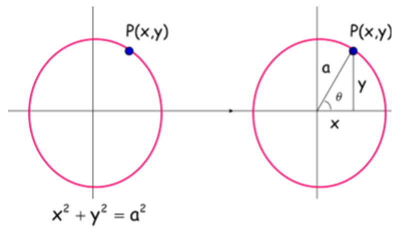


Donde el vector $(1,3,-1)\in\mathbb{R}^3$ es una base del conjunto, en este caso la dimensión de la recta generada es 1.

Dimensión de curvas en $\mathbb{R}^2$

1. Una circunferencia centrada en el origen y de radio a tiene como ecuación

$$x^2+y^2=a$$



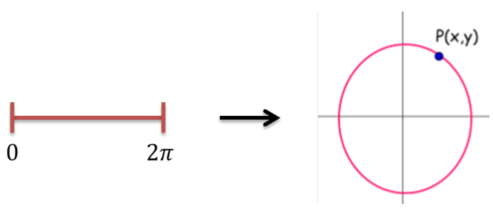
Vamos a argumentar porqué la dimensión de la circunferencia es 1.
Para ello nos apoyaremos en las ecuaciones paramétricas de la circunferencia

$$\begin{matrix} x = a\cos(t) \\ y = a\,\mathrm{sen}(t) \end{matrix} \quad t\in[0,2\pi]$$

tenemos entonces la ecuación

$$f(t)=(a\cos(t),a\,\mathrm{sen}(t))$$

entonces cada punto de la circunferencia se puede generar con el vector $(a\cos(t),a\,\mathrm{sen}(t))$ el cual depende de un parámetro $t\in[0,2\pi]$.
Esto se puede pensar como una transformación de un segmento de tamaño 2π que tiene dimensión 1, en una circunferencia, por lo que la dimensión debería preservarse, geométricamente esta transformación sería



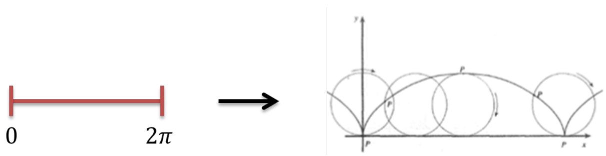
2. Una Cicloide tiene ecuaciones paramétricas

$$\begin{matrix} x = t-\mathrm{sen}(2t) \\ y = 1-\cos(t) \end{matrix} \quad t\in[0,2\pi]$$

tenemos entonces la ecuación

$$f(t)=(t-\mathrm{sen}(2t),1-\cos(t))$$

entonces cada punto de la cicloide se puede generar con el vector $(t-\mathrm{sen}(2t),1-\cos(t))$ el cual depende de un parámetro $t\in[0,2\pi]$.
Esto se puede pensar como una transformación de un segmento de tamaño 2π que tiene dimensión 1, en una cicloide por lo que la dimensión debería preservarse, geométricamente esta transformación sería



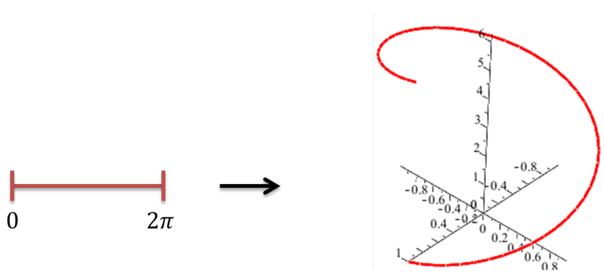
Dimensión de curvas en $\mathbb{R}^3$ Una espiral tiene ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= \cos(t) \\ y &= \operatorname{sen}(t) \quad t \in [0, 2\pi] \\ z &= t \end{aligned}$$

tenemos entonces la ecuación

$$f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$$

entonces cada punto de la espiral se puede generar con el vector $(\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$ el cual depende de un parámetro $t \in [0, 2\pi]$.
Esto se puede pensar como una transformación de un segmento de tamaño 2π que tiene dimensión 1, en una espiral por lo que la dimensión debería preservarse, geométricamente esta transformación sería



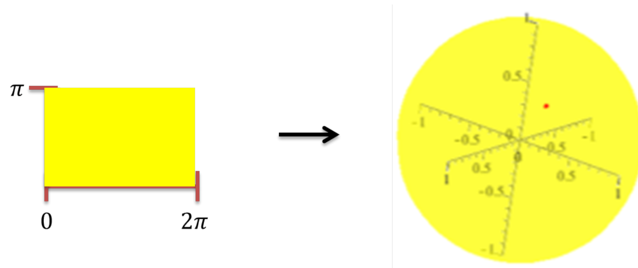
Dimensión de superficies en $\mathbb{R}^3$ Una esfera tiene ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sen}(v)\cos(u) \\ y &= \operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u) \quad u \in [0, 2\pi],\ v \in [0, \pi] \\ z &= \cos(v) \end{aligned}$$

tenemos entonces la ecuación

$$f(u, v) = (\operatorname{sen}(v)\cos(u), \operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u), \cos(v))$$

entonces cada punto de la esfera se puede generar con el vector $(\operatorname{sen}(v)\cos(u), \operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u), \cos(v))$ el cual depende de dos parámetros $u \in [0, 2\pi],\ v \in [0, \pi]$.
Esto se puede pensar como una transformación de un rectángulo de base 2π y de altura π que tiene dimensión 2 en una esfera, por lo que la dimensión debería preservarse, geométricamente esta transformación sería



Dimensión de superficies en $\mathbb{R}^3$ Un cono tiene ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= v\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(u) \\ y &= v\,\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(u) \quad u \in [0, 2\pi],\ v \in [0, \pi], \quad \alpha = k \quad fijo \\ z &= v\,\mathrm{sen}(\alpha) \end{aligned}$$

tenemos entonces la ecuación

$$f(u, v) = (v\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(u), v\,\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(u), v\,\mathrm{sen}(\alpha))$$

entonces cada punto del cono se puede generar con el vector $(v\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(u), v\,\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(u), v\,\mathrm{sen}(\alpha))$ el cual depende de dos parámetros $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi]$.
Esto se puede pensar como una transformación de un rectángulo de base 2π y de altura π que tiene dimensión 2 en una esfera, por lo que la dimensión debería preservarse, geométricamente esta transformación sería