Funciones y sus Gráficas en el Plano $\mathbb{R}^2$

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto de las parejas ordenadas cuyo primer elemento pertenece a A y cuyo segundo elemento pertenece a B, es decir,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Dos elementos $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ del producto cartesiano de A y B son iguales sólo si las coordenadas correspondientes son iguales, es decir, $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.
Cualquier subconjunto del producto cartesiano de dos conjuntos A y B se denomina una relación de A en B
Definición 1. *Sean $X,\ Y\ \subset \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos. Una función f del conjunto X en el conjunto Y es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento $x \in X$ un único elemento $f(x) \in Y$. La notación para una función es:*

$$f : X \to Y$$

Definición 2. *El conjunto*

$$\mathfrak{D}(f) = \{x \in X \mid \exists\ f(x) = y \in Y\}$$

*es llamado el **dominio** de f, se denota $\mathfrak{D}(f)$*
Definición 3. *El conjunto Y es llamado el **codominio** de f.*
Definición 4. *El conjunto*

$$\mathfrak{R}(f) = \{f(x) \in Y \mid x \in \mathfrak{D}(f) \subset X\}$$

*es llamado el **rango** de f. El rango de una función es un subconjunto del codominio.*
Definición 5. *El conjunto*

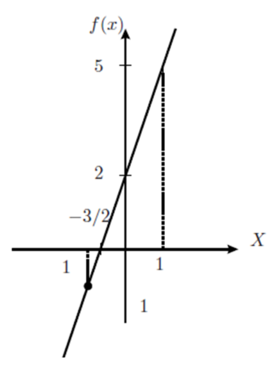
$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X,\ y = f(x)\}$$

es llamado la gráfica de la función

El procedimiento más rudimentario para construir la gráfica de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tabular, es decir, dar algunos valores de la variable x, calcular los valores f(x) correspondientes según la regla y localizar los puntos de $\mathbb{R}^2$ de la forma $(x, f(x))$; la gráfica se completa, si es el caso, uniendo esos puntos con una curva lisa.
Ejemplos

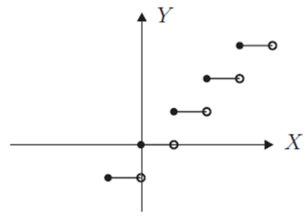
$f(x) = 3x + 2$

x	$f(x)$
-1	-1
-2/3	0
0	2
2/3	4
1	5



Ejemplo Función parte entera (función piso $\lfloor x \rfloor$)

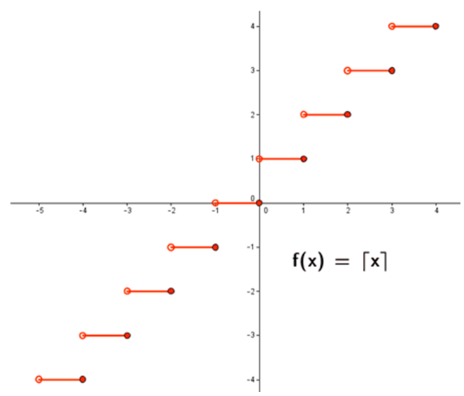
La función parte entera, $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se define así: $\lfloor x\rfloor = n$ si n es el máximo entero menor o igual que x. La gráfica de esta función está formada por los segmentos paralelos al eje X de altura n y longitud 1 que contienen al extremo izquierdo pero no al derecho, como lo muestra la Figura



La función parte entera no es inyectiva porque $f(2{,}1) = f(2{,}5) = 2$, ni suprayectiva porque f sólo toma valores enteros. Además, como la función no es continua, pues presenta discontinuidades en todos los enteros, la gráfica no es una curva continua. Es un caso particular de las llamadas funciones escalonadas, que son constantes por pedazos.

Ejemplo Función parte entera (función techo $\lceil x \rceil$)

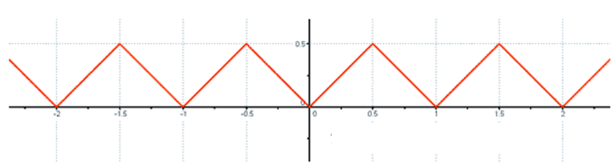
La función parte entera, $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se define así: $\lfloor x\rfloor = n$ si n es el máximo entero mayor o igual que x. La gráfica de esta función está formada por los segmentos paralelos al eje X de altura n y longitud 1 que contienen al extremo derecho pero no al izquierdo, como lo muestra la Figura



Ejemplo Función distancia al entero mas cercano

La función distancia, $\{\cdot\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se define

$$\{x\} = \textit{distancia al entero mas cercano}$$



Funciones y sus Gráficas en el Espacio $\mathbb{R}^3$

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B y C es el conjunto de las ternas ordenadas cuyo primer elemento pertenece a A, cuyo segundo elemento pertenece a B, y cuyo tercer elemento pertenece a C es decir,

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}$$

Dos elementos $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$ del producto cartesiano de A,B y C son iguales sólo si las coordenadas correspondientes son iguales, es decir, $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ y $c_1 = c_2$.

Definición 6. *Sean*

$$X \subset \mathbb{R}^2$$

y $Y \subset \mathbb{R}$ *dos conjuntos no vacíos. Una función* f *del conjunto* X *en el conjunto* Y *es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento* $(x, y) \in X$ *un único elemento* $f(x, y) \in Y$*. La notación para una función es:*

$$f : X \subset \mathbb{R}^2 \to Y \subset \mathbb{R}$$

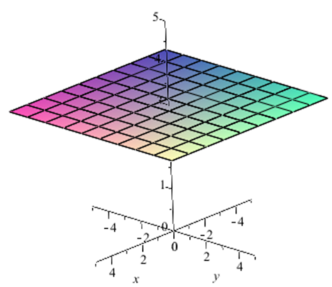
Definición 7. *El conjunto*

$$G(f) = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ z = f(x, y)\}$$

es llamado la gráfica de la función

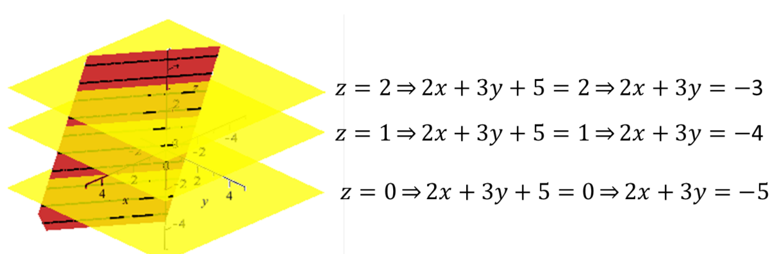
Ejemplo La gráfica de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = k$ es el conjunto

$$\{(x, y, z) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ z = k\}$$



Ejemplo La gráfica de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = 2x + 3y + 5$ es el conjunto

$$\{(x, y, z) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ z = 2x + 3y + 5\}$$



Ejemplo La gráfica de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ es el conjunto

$$\{(x, y, z) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ z = x^2 + y^2\}$$